PRIMA PROVA INTERMEDIA MATEMATICA I (2018/19) — TRACCIA B

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

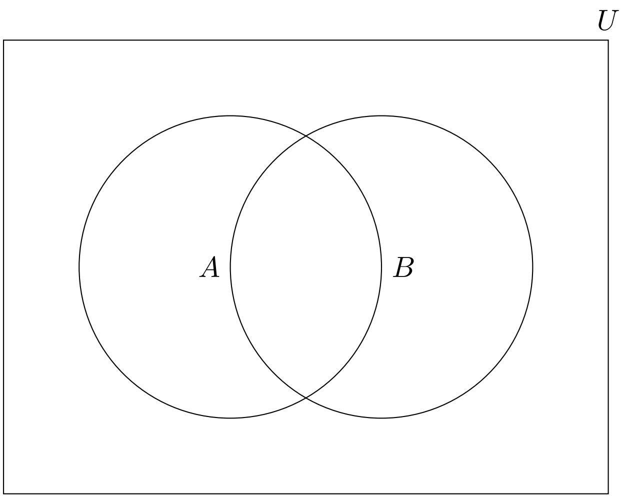
Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

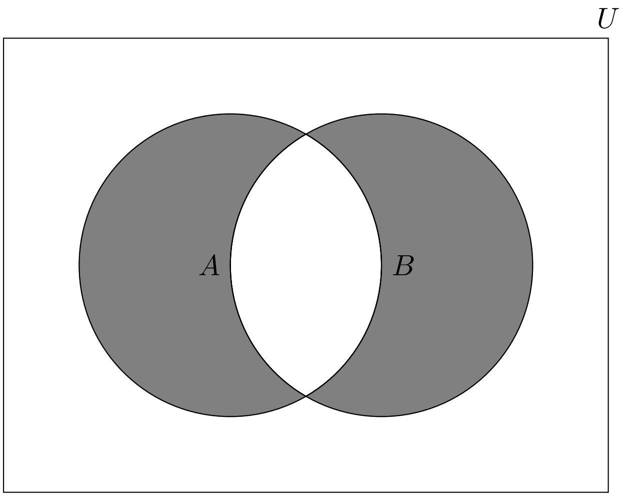
Date: 17/10/18.

Esercizio 1 (3 punti)**.** Colorare il seguente insieme

$$U \setminus \big(((U \setminus A) \cup B) \cap ((U \setminus B) \cup A)\big)$$



Soluzione:



Esercizio 2 (6 punti)**.** Dimostrare per induzione che

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Soluzione: Per $n = 1$ si ha $1 = 1^2$, che è ovviamente vero. Ora supponiamo che $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ valga per n e mostriamo che

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}1+3+5+7+...+(2(n+1)-1) &= 1+3+5+7+...+(2n+1)\\ &= 1+3+5+7+...+(2n-1)+(2n+1)\\ &= n^2+2n+1 && \text{per ipot. ind.}\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^3+(1-i)^3=0$$

Soluzione: L'equazione $z^3+(1-i)^3=0$ vale se, e soltanto se, $z^3=-(1-i)^3$, quindi dobbiamo trovare le radici terze di $-(1-i)^3=-(1+i-3i-3i)=2+2i$. Scriviamo il numero in forma trigonometrica:

$$\rho=2\sqrt{2},\qquad \cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}},\qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}},\ \text{quindi } \theta=\pi/4.$$

Dunque le tre radici sono:

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi/4}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4}{3}\right)\right)\\ z_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi/4+2\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4+2\pi}{3}\right)\right)\\ z_3 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\left(\frac{\pi/4+4\pi}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi/4+4\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)\end{aligned}$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Descrivere il dominio della seguente funzione.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-3+\sqrt{x^2-5}}}{\operatorname{tg}(x+1)}$$

Soluzione: Dobbiamo imporre:

$$\begin{cases} x-3+\sqrt{x^2-5}\geq 0\\ x^2-5\geq 0\\ x+1\neq \frac{(2k+1)\pi}{2} & \text{con } k\in\mathbb{Z}.\\ x+1\neq k\pi & \text{con } k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Quindi $dom(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>7/3\}\setminus\{\frac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^3-1}}{n}.$$

Soluzione:

Esercizio 6 (6 punti)**.** Data un a successione a_n, dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \notin \mathbb{R}$.

Soluzione: Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, quindi

$$\forall M > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k \, a_n > M$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ fosse un numero reale arbitrario l, allora avremmo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k \, |a_n - l| < \varepsilon,$$

quindi, fissato $\varepsilon = 1$, da un certo k in poi tutti gli a_n sarebbero compresi nell'intervallo $[l-1, l+1]$ e questo non è possibile perché allo stesso tempo devono superare qualsiasi $M > 0$.