**SECONDA PROVA INTERMEDIA MATEMATICA I (2018/19) —
TRACCIA A**

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 21/11/18.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\log(x)}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
&(1) & \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\log(x)}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1-\log(x)}{(x-1)\log(x)}\right)\\
&(2) & &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\log(x)+\frac{x-1}{x}}\right)\\
&(3) & &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1+x\log(x)}{x}}\right)\\
&(4) & &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{x-1+x\log(x)}\right)\\
&(5) & &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{1+\log(x)+1}\right)\\
&(6) & &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dove in (1) e in (5) è stato utilizzato il teorema di De L'Hôpital.

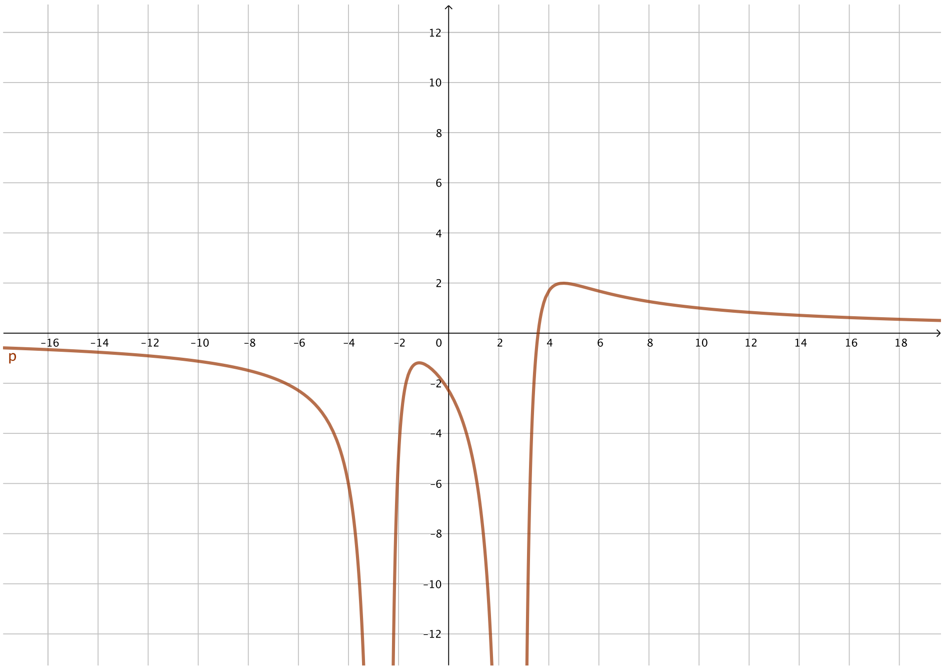
Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite senza usare De L'Hôpital

$$\lim_{x\to0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

Soluzione:

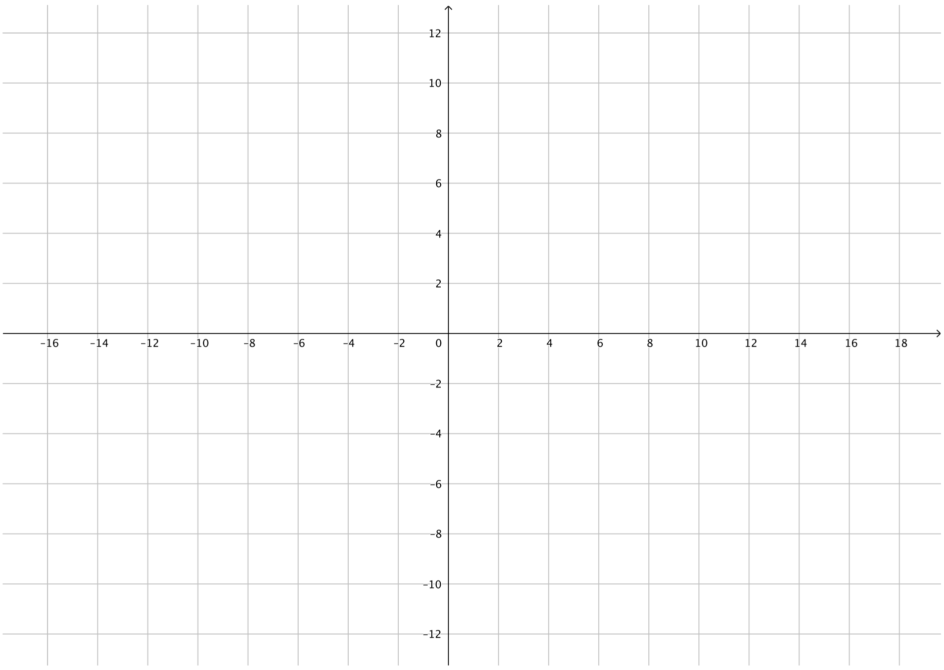
$$\lim_{x\to0^+}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{2}{y}\right)^{y} = e^{-2}$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

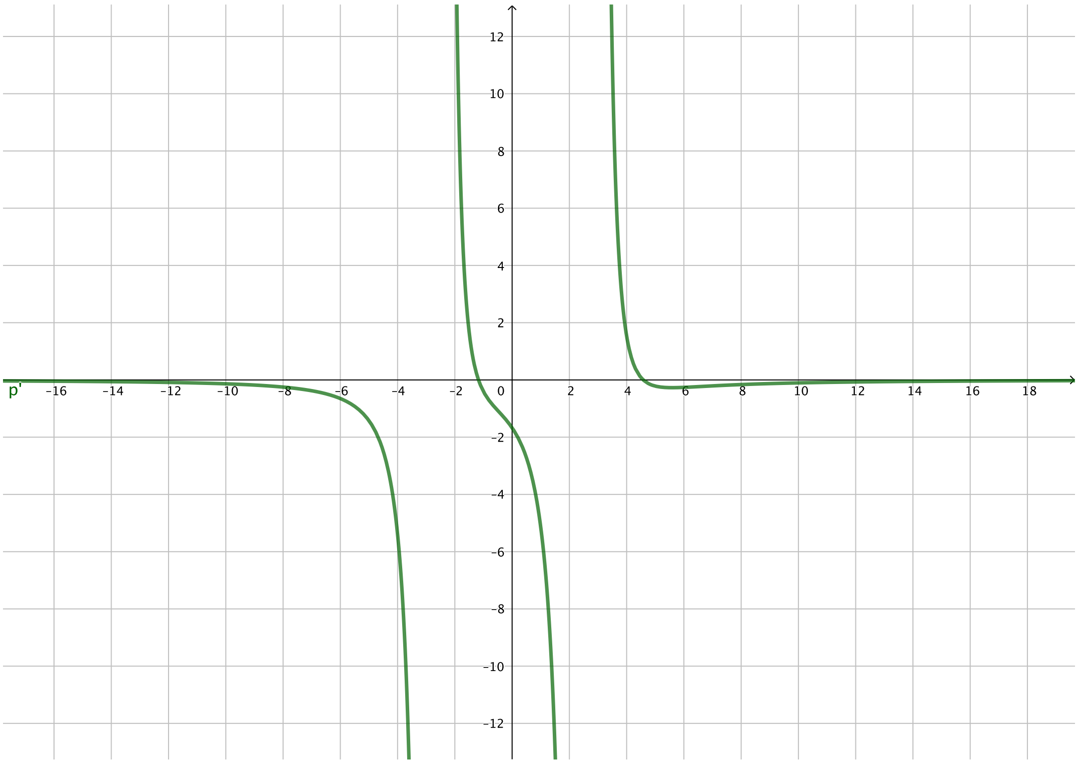


.

Disegnarne approssimativamente la derivata



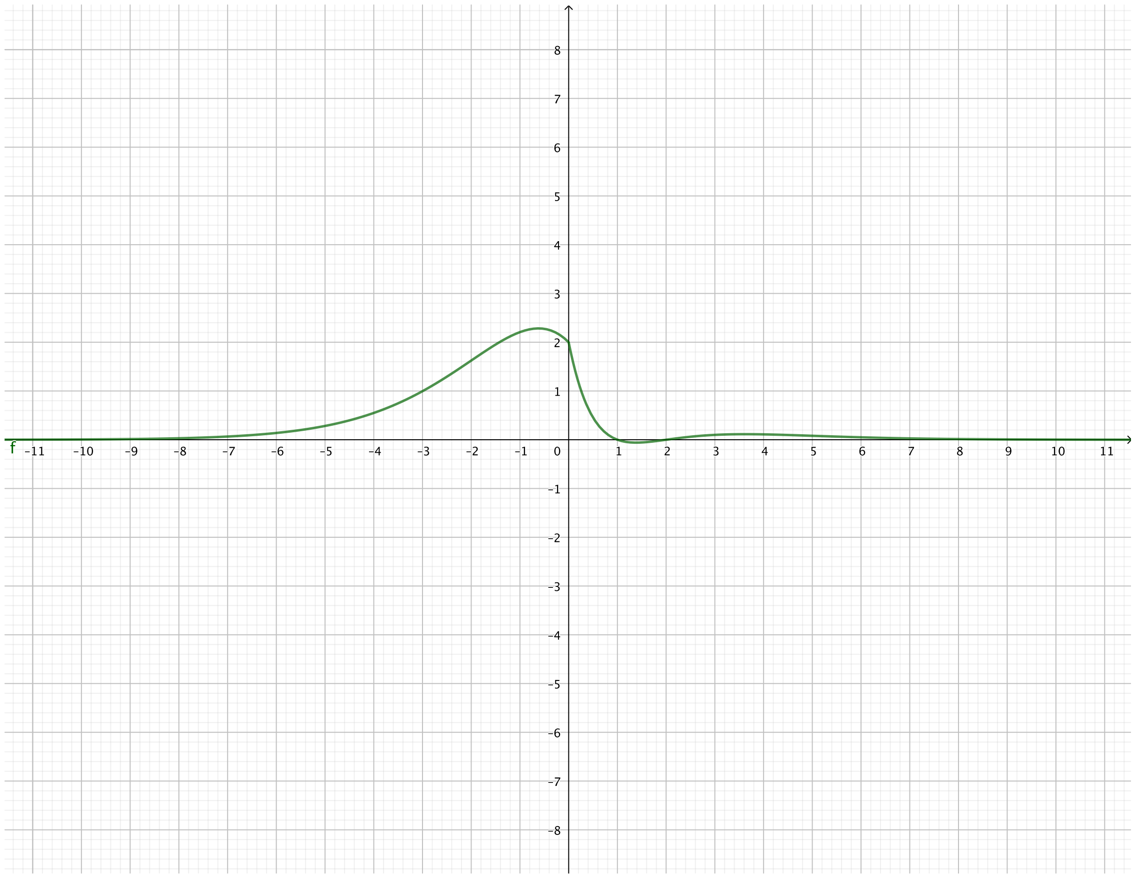
Soluzione:



Esercizio 4 (6 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$(x^2 - 3x + 2)e^{-|x|}$$

Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Date le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{ e } g(y) = \operatorname{sen}(1-y)$$

calcolare le derivate di $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione: Risulta:

$$f \circ g = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(1-y)+1}} \text{ e } g \circ f = \operatorname{sen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

Quindi si ha:

$$(f \circ g)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(1-y)+1}}}{\operatorname{sen}(1-y)+1} \cos(1-y) = -\frac{\cos(1-y)}{2\sqrt{(\operatorname{sen}(1-y)+1)^3}}$$

$$g \circ f = -\cos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$$

Esercizio 6 (6 punti)**.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dire quali se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

(1) se f è derivabile in $[0,1]$ e se $x_0 \in [0,1]$ è un punto di massimo per f allora $f'(x_0) = 0$;
(2) f ha massimo in $[0,1]$;
(3) se x_0 è un punto di massimo per f allora f è derivabile in x_0;
(4) f ha massimo solo se esiste almeno un punto in cui f' è nulla.

Soluzione:

(1) Vero, per il teorema di Fermat;
(2) Vero, per il teorema di Weierstrass;
(3) Non necessariamente, es. $-|x|$;
(4) Non necessariamente, perché la derivata in quel punto potrebbe non essere definita. Es. $-|x|$.