SECONDA PROVA INTERMEDIA MATEMATICA I (2018/19) — TRACCIA B

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 21/11/18.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)}\right) \tag{1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}\right)= \tag{2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}\right)=0 \tag{3}$$

(4)

Dove in (2) e in (3) è stato utilizzato il teorema di De L'Hôpital.

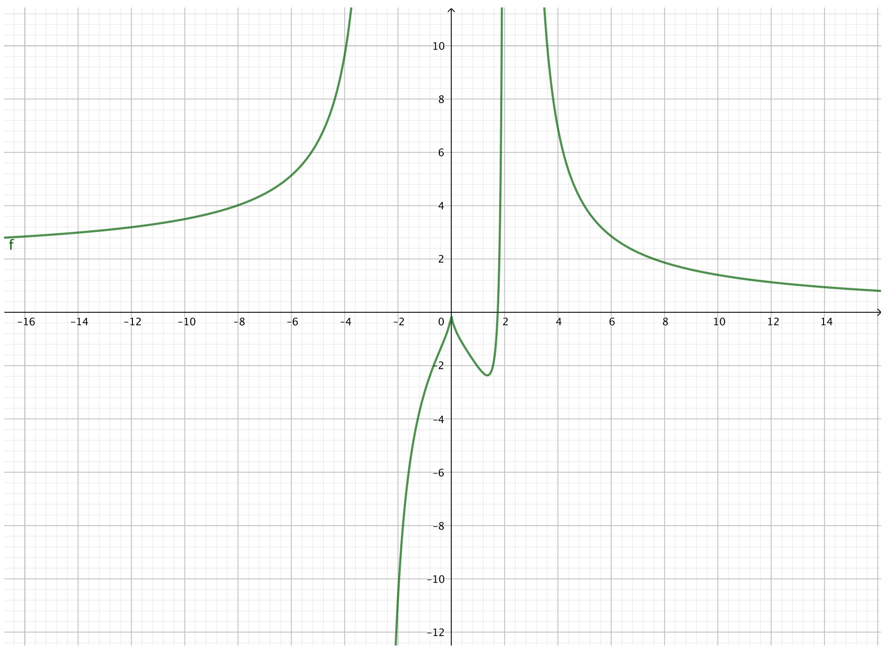
Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare il seguente limite senza usare De L'Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-e^{(1-2x)^2}}{5(2x-1)^2}$$

Soluzione:

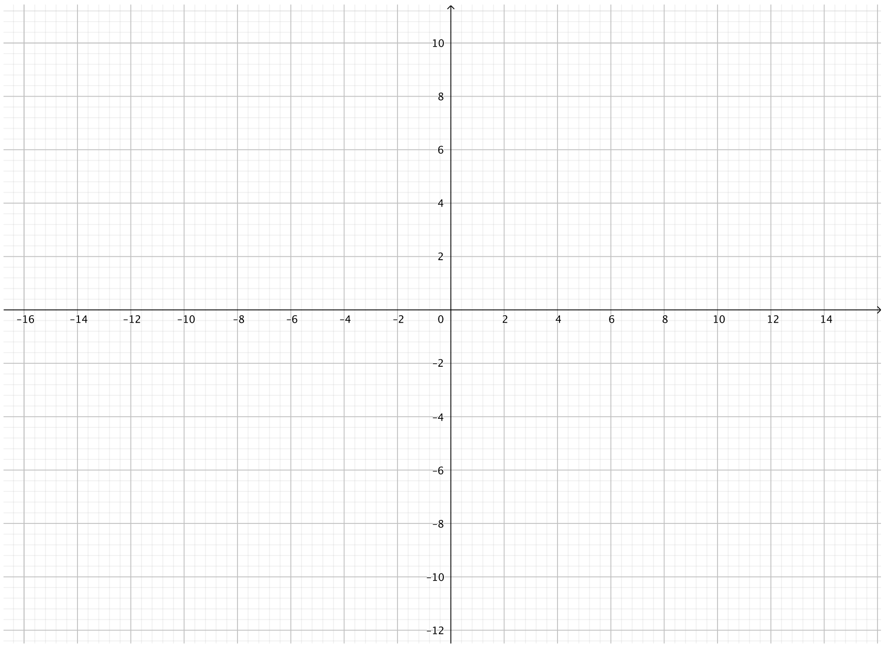
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1-e^{(1-2x)^2}}{5(2x-1)^2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\frac{e^{(1-2x)^2}-1}{(1-2x)^2}=\lim_{y\to 0}-\frac{1}{5}\frac{e^{y}-1}{y}=-\frac{1}{5}.$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

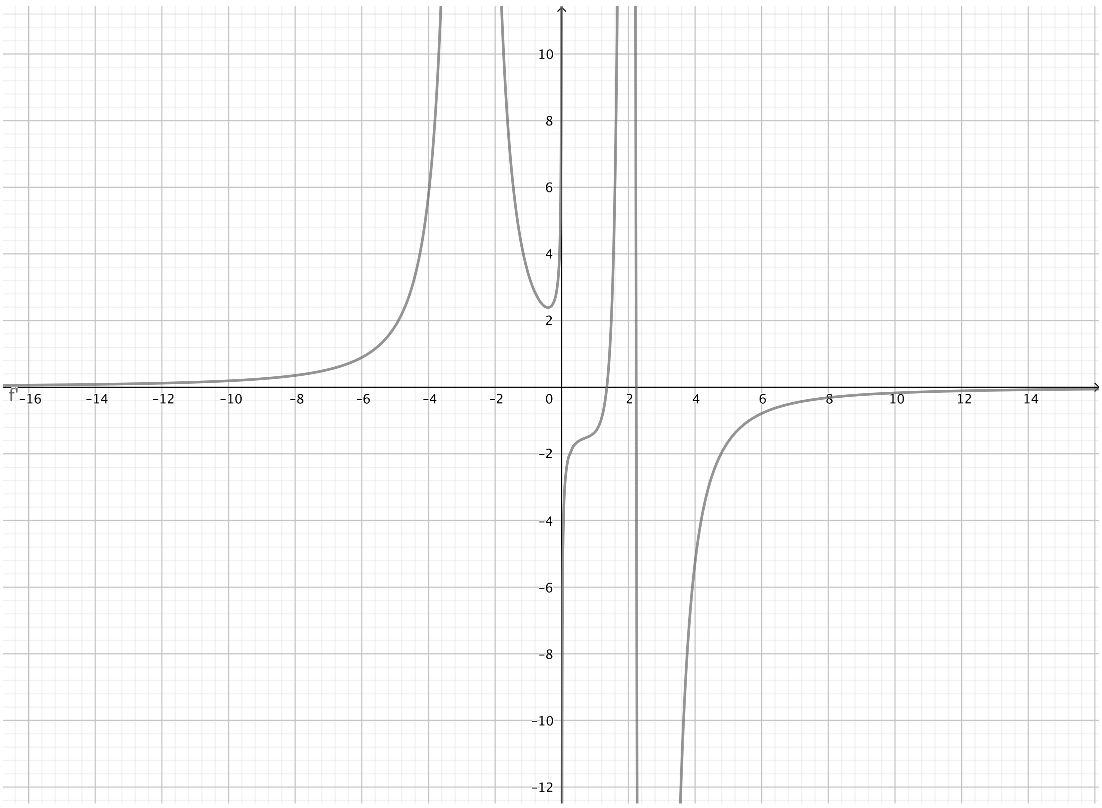


.

Disegnarne approssimativamente la derivata



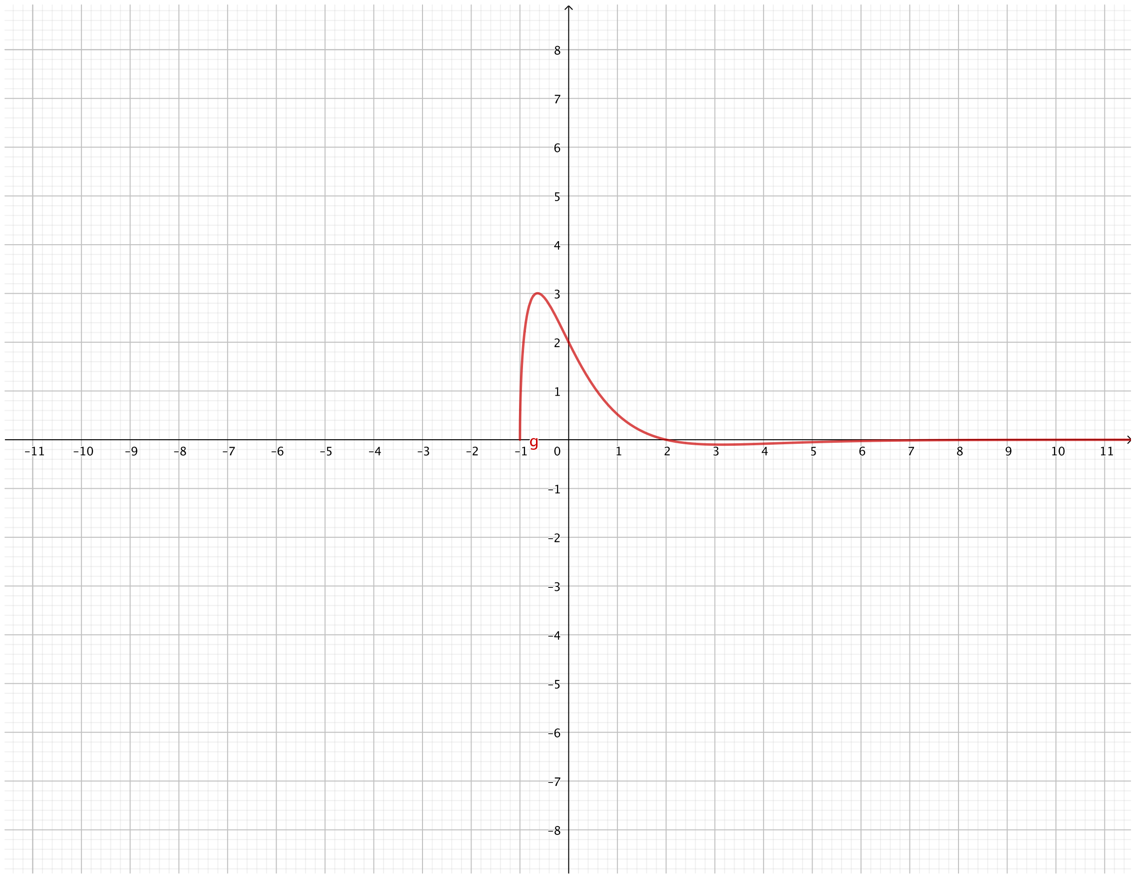
Soluzione:



Esercizio 4 (6 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$(2-x)\sqrt{x+1}e^{-x}$$

Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Date le funzioni

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ e } g(y) = 3\log(\sqrt{y})$$

calcolare le derivate di $f \circ g$ e $g \circ f$.

Soluzione: Risulta:

$$f \circ g = (3\log(\sqrt{y}))^2 + 1 \text{ e } g \circ f = 3\log(\sqrt{x^2+1})$$

Quindi si ha:

$$(f \circ g)' = \frac{6\log(\sqrt{y})}{\sqrt{y}2\sqrt{y}} = \frac{3\log(\sqrt{y})}{y}$$

$$g \circ f = \frac{6x}{2(\sqrt{x^2+1})^2}$$

Esercizio 6 (6 punti)**.** Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dire quali se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

(1) Se $|f|$ è continua allora f è continua;
(2) Se f è derivabile allora $|f|$ è continua;

(3) Se f è derivabile allora $|f|$ è derivabile;
(4) Se f è continua allora f ha massimo e minimo.

Soluzione:

(1) Falso, es:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
(2) Vero, infatti se f è derivabile, allora f è continua. Poiché valore assoluto è una funzione continua $|f|$ è continua perché composizione di funzioni continue.
(3) Falso, es. $f(x) = x$;
(4) Falso, es. $f(x) = x$ (è vero solo se ci restringiamo a un intervallo chiuso $[a, b]$)