Lezione del 3/10/23

Esercizio Indichiamo con $p(x,y)$
"L'uomo x guarda la stella y"

1) $\forall x \forall y \; p(x,y)$: Ogni uomo guarda tutte le stelle
2) $\forall x \exists y \; p(x,y)$: Ogni uomo guarda almeno una stella
3) $\exists x \forall y \; p(x,y)$: Esiste un uomo che guarda tutte le stelle
4) $\exists x \exists y \; p(x,y)$: Almeno un uomo guarda almeno una stella

C'è un uomo che non guarda nessuna stella 1), 2)

$$\exists x \forall y \neg p(x,y)$$

C'è una stella che nessuno guarda. 1), 3)

$$\exists y \forall x \neg p(x,y) \neq \forall x \exists y \neg p(x,y)$$

Esercizio 2 Completare le seguenti frasi usando gli opportuni quantificatori

(a) Dati due interi a e b si dice che a divide b se $\exists\, m \in \mathbb{Z} : b = m \cdot a$

(b) Un numero intero $p > 1$ si dice primo se $\forall x$ (se $x \mid p$ allora $x=1$ o $x=p$)

$\forall x \, (x \mid p \rightarrow (x=1 \lor x=p))$

implica o

(c)

(d) Un poligono si dice regolare $\forall x \, \forall y$ lati del poligono $(x=y)$

$\forall u \, \forall v$ angolo del poligono $(u=v)$

(e) Un triangolo è isoscele $\exists x \, \exists y$ lati del triangolo $(x=y)$

Esercizio 3

Esplicitare i connettivi "e" ed "o" nelle seguenti espressioni matematiche

(a) $x \geq 2$ maggiore o uguale $(x > 2 \overset{o}{\vee} x = 2)$

(b) $1 < x < 3$ $\quad 1 < x$ e $x < 3$ $\quad (1 < x \overset{e}{\wedge} x < 3)$

(c) $x = \pm 3$ $\quad \overset{A}{x = +3}$ o $\overset{B}{x = -3}$

(d) $x \neq \pm 3$ $\quad$ non $\overset{(A}{x \neq +3}$ $\overset{o}{\text{e}}$ $\overset{B)}{x \neq -3}$

non $(A$ o $B)$ = non A e non B

Per insieme si intende una "collezione", "famiglia", "aggregato" di elementi.

Per dire che l'individuo x è nell'insieme A

$$x \in A$$

- Gli elementi di un insieme possono essere insiemi a loro volta (es le rette sono elementi del piano e insiemi di punti)
- Un elemento di un insieme può far parte anche di un altro insieme (es. $2 \in$ Pari e $2 \in$ Primi)
- Due insiemi sono uguali <u>esattamente</u> quando hanno gli stessi elementi

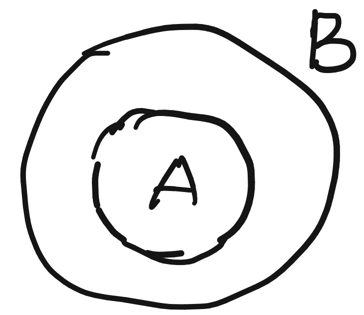
Es

$$A = \{1, 2, 5\}$$
$$B = \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \mid n\}$$

L'insieme delle soluzioni di $x^5 + 3x^2 + 5x - 3 = 0$

(incluso)

Def. A è contenuto o uguale a B, in simbolo $A \subseteq B$, se tutti gli elementi di A stanno in B, $\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$



Osserviamo che

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

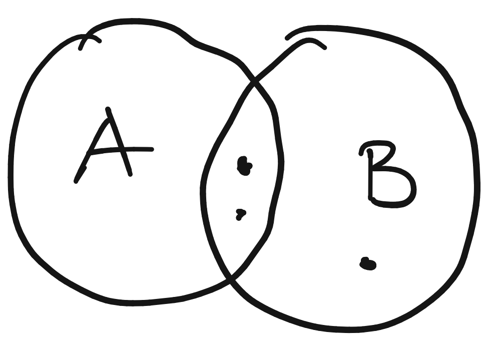
$x \notin A$ — x non è un elemento di A

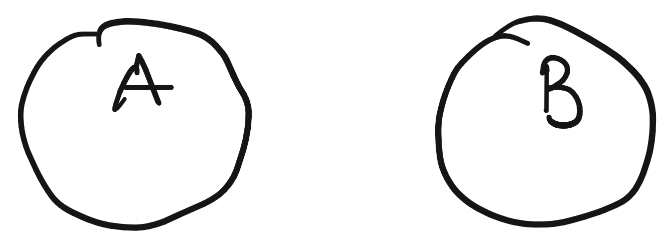
$A \not\subseteq B$ — A non (è incluso o eguale) a B

$\exists x \; (x \in A$ e $x \notin B)$

$A \neq B$ — A non ha elementi in comune con B

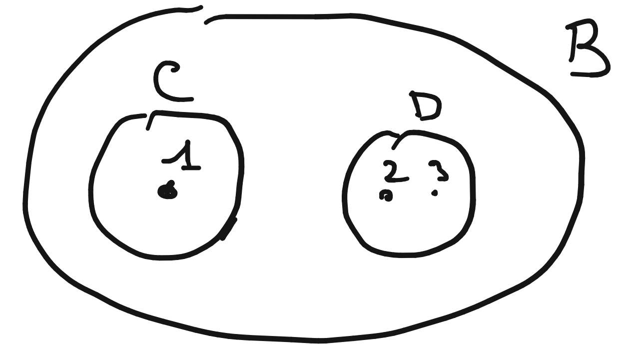
distinti $\Longleftarrow$ disgiunti

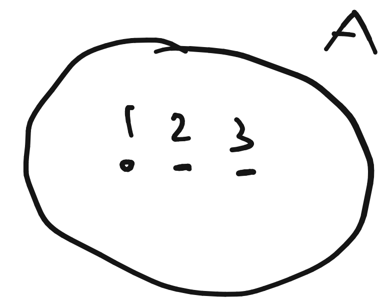




Esempio

$A = \{\underbrace{1}, \underbrace{2}, \underbrace{3}\}$ $\quad B = \{\underbrace{\overset{C}{\{1\}}}, \underbrace{\overset{D}{\{2,3\}}}\}$





(a) $A = B$? No $\quad \{2,3\} \in B \quad \{2,3\} \notin A$

(b) A e B hanno gli stessi ? No

(c) A e B hanno lo stesso numero di elementi ? A ha 3 elementi e B ne ha 2

(d) $1 \in A$? sì $\quad 1 \in B$? NO

$\{1\} \in A$? NO $\quad \{1\} \in B$? sì

(e) $1 \subseteq A$? NO , $1 \subseteq B$? NO , $\{1\} \subseteq A$? sì , $\{1\} \subseteq B$? NO

$\{\{1\}\} \subseteq B$? sì

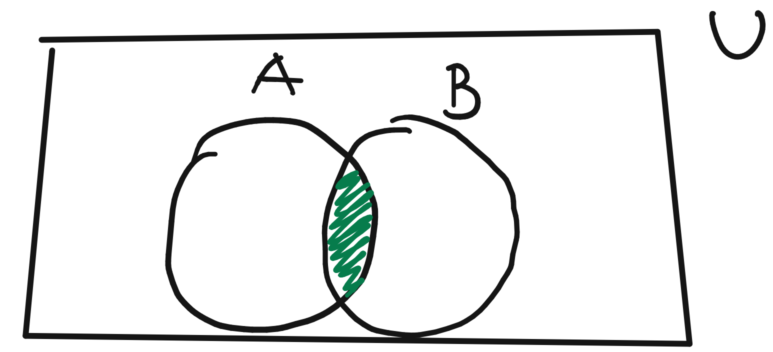
Indicheremo con $\emptyset$ l'unico insieme che non ha elementi

$\emptyset \in A$? No $\quad \emptyset \subseteq A$? sì

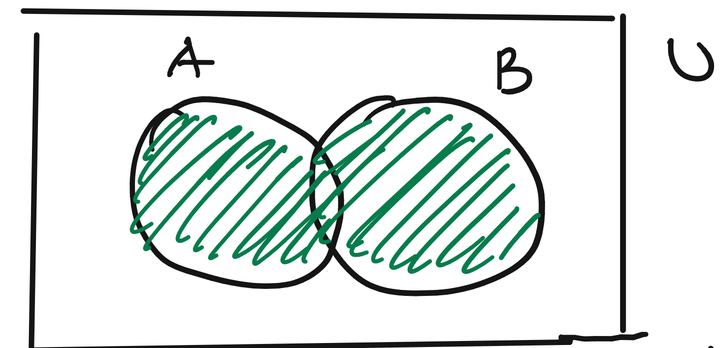
Operazioni tra insiemi. Supponiamo di avere un insieme U che chiamiamo universo in cui tutti gli insiemi che consideriamo sono contenuti. Siano $A, B \subseteq U$.

Definiamo

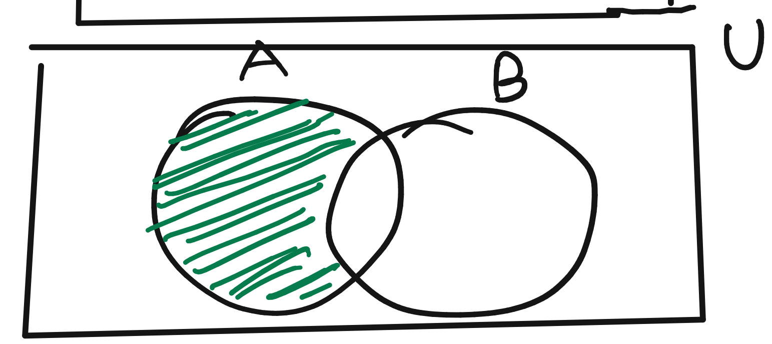
$$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$



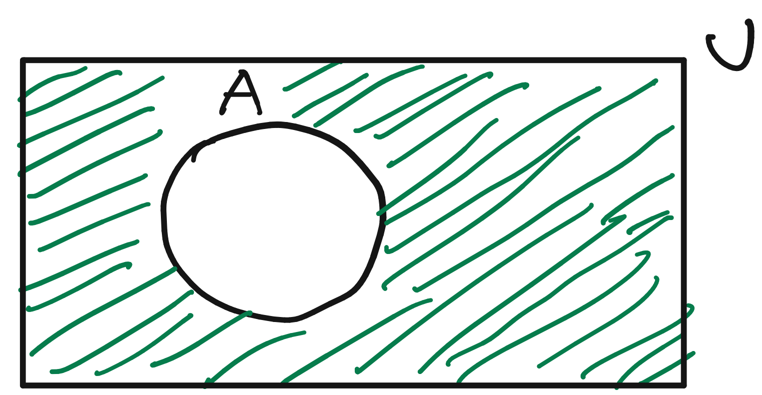
$$A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$



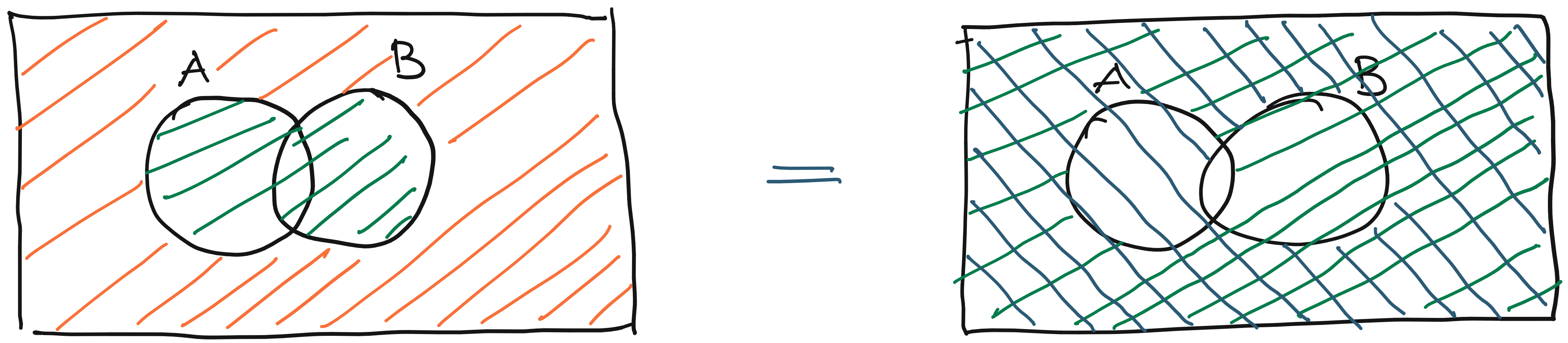
$$A \setminus B = \{ x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$



$$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$



non (A o B) = non A e non B



$\mathbb{N}$ numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ numeri interi $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$

$\mathbb{R}$ numeri reali $\{a, bcdef\dots \quad a \in \mathbb{Z},\ b, c, d, e, f \dots \in \mathbb{N}\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

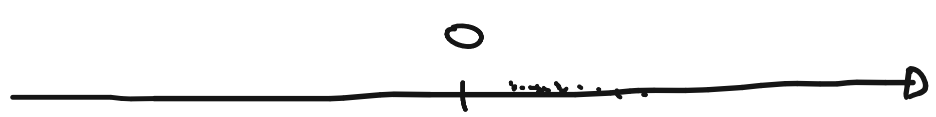
$1,33333\dots$
$= 1,\overline{3} \in \mathbb{Q}$

$0,71 \in \mathbb{Q}$

$\frac{71}{100}$

$0,123456789101112\dots$

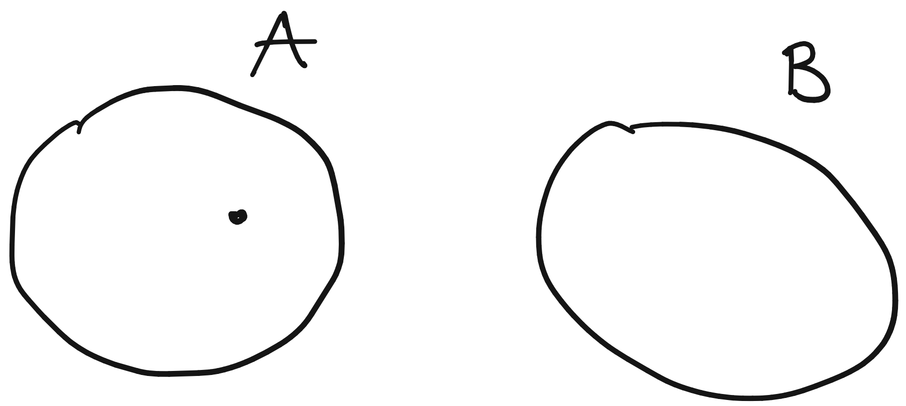
$\sqrt{2}, \pi, e \in \mathbb{R}$



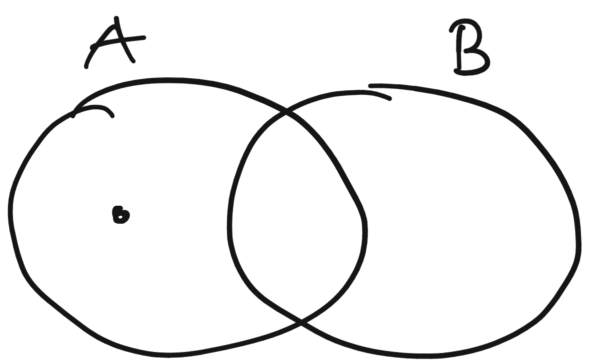
Es Dire che $A \not\subseteq B$ equivale a dire

1) Nessun x appartenente ad A sta anche in B
2) B è contenuto strettamente in A
3) Esiste x appartenente ad A e non appartenente a B

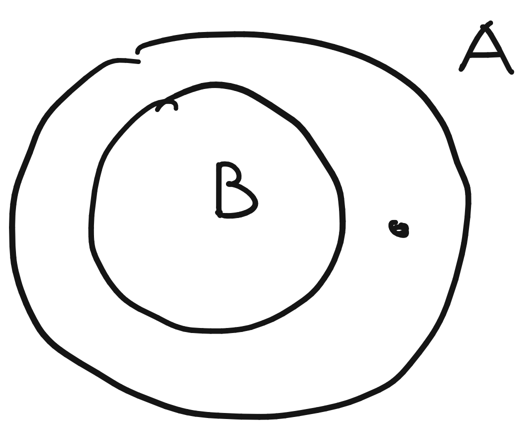
$A \not\subseteq B$

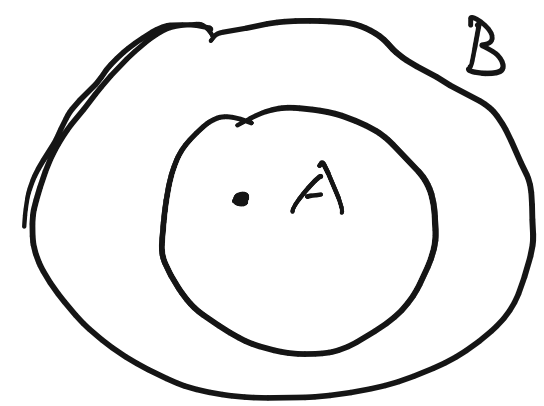


$A \not\subseteq B$



$A \not\subseteq B$





$A \subseteq B$