Lezione del 5/10/23 Fissiamo un universo U

Esercizio

a) $A \cap A = \{x \in U \mid \underline{x \in A} \text{ e } \underline{x \in A}\} = \{x \in U \mid x \in A\} = A$

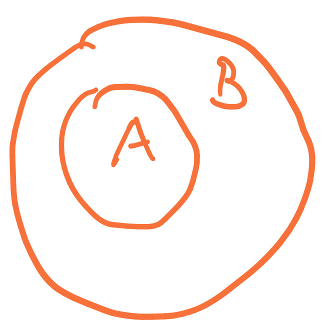
b) $A \cup A = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in A\} = \{x \in U \mid x \in A\} = A$

c) $A \cap \emptyset = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in \emptyset\} = \emptyset$

d) $A \cup \emptyset = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in \emptyset\} = \{x \in U \mid x \in A\} = A$

e) Dire che $A \subseteq B$ è equivalente a dire che

$$A \cap B = A$$



Proviamo a dimostrare che $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

$\Rightarrow$ Supponiamo che $A \subseteq B$, questo vuol dire che per ogni $x \in U$ se $x \in A$ allora $x \in B$

Calcoliamo $A \cap B \overset{def}{=} \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\} =$

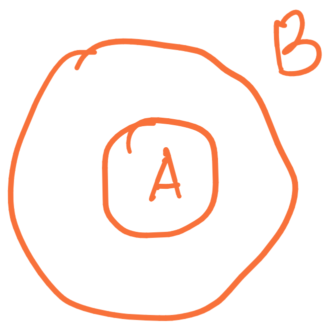
$$= \{x \in U \mid x \in A\}$$

$\Leftarrow$ Supponiamo che $A \cap B = A$, questo significa che

$\{x \in U \mid \underline{x \in A} \text{ e } \underline{x \in B}\} = \{x \in U \mid \underline{x \in A}\} \Rightarrow A \subseteq B$

Abbiamo mostrato che $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

f) Dire che $A \subseteq B$ è equivalente a dire che $A \cup B = B$



$\Rightarrow$ Se $A \subseteq B$ allora per ogni $x \in U$ $x \in A$ implica $x \in B$

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o } x \in B\} = \{x \in U \mid x \in B\}$$

$\Leftarrow$ Se $A \cup B = B$ si ha $\{x \in U \mid \underline{x \in A} \text{ o } \underline{x \in B}\} = B$

quindi $A \subseteq B$

Osserviamo che per dimostrare $\overbrace{A = B}^{\text{insiemi}}$ facciamo vedere $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

" " $\underbrace{C \iff D}_{\text{proposizioni enunciati}}$ facciamo vedere $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$

Si assume A come ipotesi e si dimostra B.

Esercizio a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributività

a) Cominciamo dal dimostrare che $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Per dimostrarlo dobbiamo far vedere che

se $x \in A \cap (B \cup C)$ allora $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Dire che $x \in A \cap (B \cup C)$ è equivalente a dire che

$x \in A$ e $x \in B \cup C$ $\Updownarrow$ (per la def. di $\cap$)

$x \in A$ e (o $x \in B$ o $x \in C$) $\Updownarrow$

o $x \in A$ e $x \in B$ oppure $x \in A$ e $x \in C$ $\Updownarrow$ (per def di $\cap$)

o $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$ $\Updownarrow$ (per def di $\cup$)

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Dimostriamo $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Sia $x \in A \cup (B \cap C)$, per def di $\cup$ questo è equivalente a

$x \in A$ o $x \in B \cap C$ " " " $\cap$ " " " "

$x \in A$ o $(x \in B$ e $x \in C)$

$\Updownarrow$

$x \in A$ o $x \in B$ e $x \in A$ o $x \in C$ per def di $\cup$ questo è equivalente a

$x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ per def di $\cap$ questo è equivalente a

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>Es</u>

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A^c)^c = A$

$\vdots$

$A \cap B \subseteq A \cup B$

$A \setminus B \subseteq A$

$\vdots$

Le variabili logiche

a) Se T è un triangolo allora T è isoscele

n è un numero primo

n è un numero per cui esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = 2k$

ci sono variabili libere

n non è vincolata

k è vincolata

b) 13 è un numero primo — vera

non presente variabili

c) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, n è un numero primo — falsa

vincola

Esiste un $n \in \mathbb{N}$, n è un numero primo — vera

tutte le variabili sono vincolate

$\underbrace{n}_{\text{libera}}$ è un numero tale che $\underbrace{\text{per ogni } k}_{\text{vincolata}}$ se k divide n allora $k = 1$ o $k = n$

$\forall k \; P(k, n)$

proposizioni: le frasi che non hanno variabili libere

forme proposizionali: le frasi che hanno variabili libere

Esempio

Per ogni intero n il numero $n^2 + n + 2$ è pari proposizioni

Per ogni intero n il numero $n^2 + n + k$ è pari forma proposizionale

Il numero $2n$ è minore di 7

Data una retta r esiste una parabola P che non ha punti di intersezione con r proposizione

Per ~~ogni intero~~ k il numero $n^2 + n + 2$ è pari   forme proposizionali

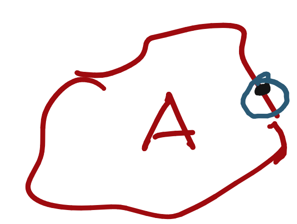
Osserviamo che le forme proposizionali (con variabili libere) descrivono delle proprietà.

Esempi a) Un numero intero n si dice pari se $\iff$ $n = 2k$
esiste k

$$P(n) \iff \exists k\,(n = 2k)$$

b) Un punto $x \in \mathbb{R}^2$ si dice di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ se per ogni cerchio di centro x contiene infiniti punti di A

$$Acc(x, A) \iff P(c, x, A)$$



c) Una funzione f si dice derivabile in x sse

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall h \left(|h|<\delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| < \varepsilon \right)$$

Esempi di insiemi

L'insieme dei numeri interi positivi che sono somme di due quadrati

$$\{ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0 \ \exists a \ \exists b (a^2 + b^2 = x) \} \subseteq \mathbb{Z}$$

$4^2 + 4^2 = 32$

$2^2 + 2^2 = 8$

$2^2 + 1^2 = 5$