Lezione del 10/10/23

Una **proposizione** è una frase di cui si può stabilire la verità o la falsità

Es 3 è un numero pari $P(3)$

13 è un numero primo $Q(13)$

Esiste un numero x che moltiplicato per 3 dà un numero pari.

Una **formula proposizionale** è una proposizione in cui alcune variabili sono libere

Es: x è pari $P(x)$

x è primo $Q(x)$

Un numero x è divisibile per un numero y $R(x,y)$

→ Un numero x tale che esiste y per cui $x = 2y$ $R'(x)$

$\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \quad x = 2y\}$ = Insieme dei numeri pari

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 16\}$

x divide y $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ il numero x è tale che esiste uno z per cui $x \cdot z = y$

Esiste il numero x è tale che esiste uno z per cui per ogni y $x \cdot z = y$

Esercizio L'insieme dei numeri naturali che sono somma di due quadrati

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid \exists y \, \exists z \in \mathbb{N} \;\; x = y^2 + z^2 \}$$

L'insieme delle coppie dei numeri reali il cui prodotto è 1

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overset{R(x,y)}{x \cdot y = 1} \}$$

L'insieme dei naturali che sono divisibili per un quadrato perfetto

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \;\; k^2 \mid n \}$$

$x \mid y$ "x divide y"

L'insieme dei segmenti del piano di lunghezza 1 che contengono l'origine

$S = \{$segmenti del piano$\}$

O origine

$$\{ x \in S \mid \|x\| = 1 \text{ e } O \in x \}$$

$\|x\|$ lunghezza del segmento x

L' insieme delle potenze intere di 2

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \; x = 2^n \}$$

________ ________ ________

Connettivi

o	e	non	se... allora... implica
$\vee$	$\wedge$	$\neg$	$\rightarrow$

$A \rightarrow B$

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

A = piove

B = prendo l'ombrello

$A \rightarrow B$ = se piove allora prendo l'ombrello

Se $\underbrace{p \text{ è un numero primo}}_{A}$ **allora** $\underbrace{p \text{ è dispari}}_{B}$

A ✓ $\qquad$ B ✓

$p=2$ ✓ $\qquad$ ✗

Se $\underbrace{x \text{ è multiplo di } 9}_{A}$ **allora** $\underbrace{\text{è multiplo di } 6}_{B}$

$x = 27$ ✓ $\qquad$ ✗

$\underline{\text{Per ogni } n \in \mathbb{N}}$ Se $\underbrace{n \text{ è dispari}}_{A}$ allora $\underbrace{n^2 \text{ è dispari}}_{B}$

3	9	✓
7	49	✓
2 ✗	4	

Sia n un qualsiasi numero naturale
suppongo che n sia dispari $\iff \boxed{\exists k \quad n = 2k+1}$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2k(2k+2)}_{2m} + 1 \quad \text{dispari !!}$$

con $m = k(2k+2)$

Se a è il prodotto di tre numeri primi allora $a+2$ è primo

$$\underbrace{\exists\, p_1, p_2, p_3 \text{ primi} \quad a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}_{A} \Longrightarrow \underbrace{a+2 \text{ è primo}}_{B}$$

$a \Rightarrow b$ si può leggere in molte maniere <u>equivalenti</u> :

a implica b

se vale a allora vale b

a vale solo se vale b

$$a \rightarrow b \neq b \rightarrow a$$

a è condizione sufficiente per b

b è condizione necessaria per a

condizione sufficiente per b è a

condizione necessaria per a è b

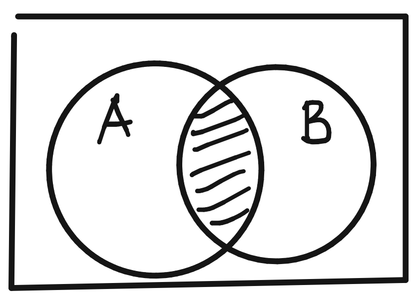
tutti gli oggetti che soddisfano a soddisfano anche b

solo gli oggetti che soddisfano b soddisfano anche a

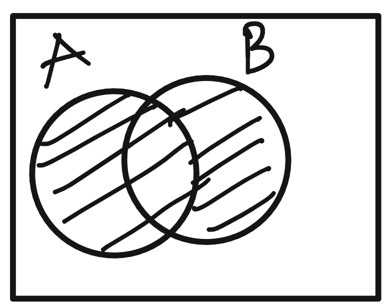
$(A \to B) \wedge (B \to A)$

$=$

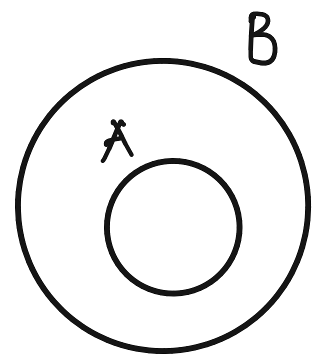
A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$\neg A$	$A \longleftrightarrow B$
F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	F	V

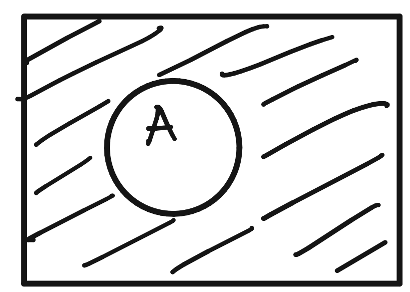


intesezione

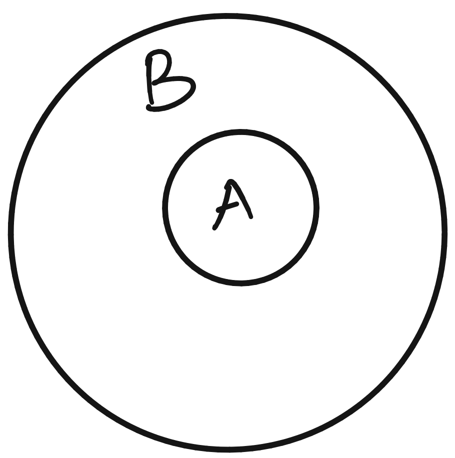


unione

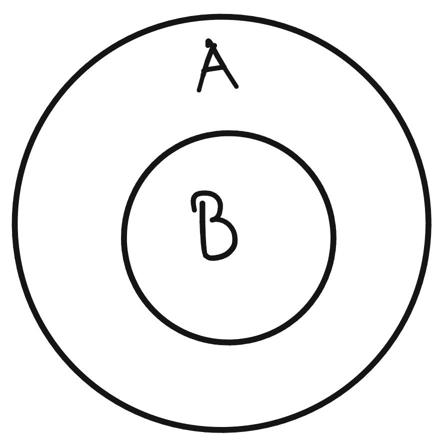




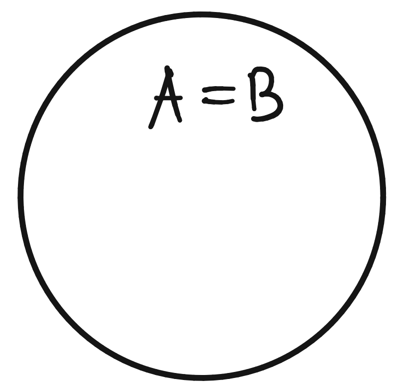
complemento



$A \to B$



$B \to A$



$A \longleftrightarrow B$

Consideriamo le seguenti formule proposizionali

(a) $n \geq 3$

(b) n è dispari e primo

(c) $\exists k \geq 3$ tale che $n > k$

$(a) \overset{?}{\to} (b)$ $(a) \overset{?}{\to} (c)$ $(b) \overset{?}{\to} (c)$ $b \overset{?}{\to} a$ $c \overset{?}{\to} a$ $c \overset{?}{\to} b$

$a \to b$? Se $n \geq 3$ allora n è dispari e primo? no $n=4$

$a \to c$? Se $n \geq 3$ allora $\exists k \geq 3$ tale che $n > k$? no $n = 3$

$b \to c$? Se n è dispari e primo allora $\exists k \geq 3$ tale che $n > k$? no $n=3$

$c \to a$? Se $\underbrace{\exists k \geq 3 \text{ t.c. } n > k}$, allora $n \geq 3 \Leftrightarrow (n = 3 \vee n > 3)$

Sia n t.c. $\exists k \geq 3$ $n > k \geq 3 \Rightarrow n > 3$ si

$b \to a$ Se n è dispari e primo allora $n \geq 3$? si

$c \to b$ Se $\exists k \geq 3$ t.c. $n > k$ allora n è dispari e primo? NO $n=10$

(a) Se $\underbrace{a > b \text{ e } b < c}$ allora $\underbrace{a > c}$?

$b = 5$

$a = 10$

$10 > 5$ ✓

$c = 100$

$5 < 100$ ✓

$10 > 100$ ✗

(A) Il numero intero positivo m è divisibile per 4. Individuare condizioni necessarie o sufficienti per le precedenti affermazioni

(1) m è pari

[(1) è necessario per (A)
(1) non è sufficiente per (A) $m = 10$]

(2) m è divisibile per 48

(2) è necessario per (A)? NO $n = 16$
(2) è sufficiente per (A)? si

(3) Il quadrato di m è divisibile per 8

(3) è necessario per (A) si
(3) è sufficiente per (A) si

$(3) \not\Rightarrow (A)$

$$m^2 = 8 \cdot k$$

$$k = 2k'$$

$$m = \sqrt{m^2} = \sqrt{8 \cdot k} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot k'} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{k'} = 4k'$$

(A) Il numero intero positivo n è divisibile per 4

(4) n è il doppio di un numero pari

$\exists k$ pari t.c. $n = 2k = 4\ell$

$\exists \ell$ t.c. $k = 2\ell$

(5) 2^n è pari

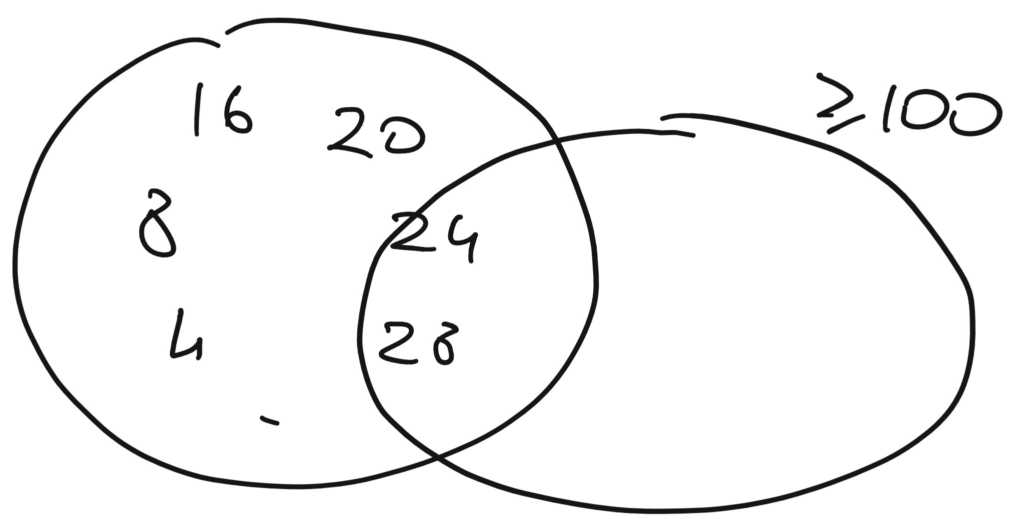
(5) è condizione necessaria per (A)? SI

(5) " " sufficiente " (A)? NO

(6) $n \leq 100$

(6) è condizione necessaria per (A)? NO $n = 400$

(6) " " sufficiente " (A)? NO $n = 7$



(5) $n \mid 2^n$ è pari