Lezione del 19|10|23

$$\underline{1}+\underline{2}+\underline{3}+\dots+\underline{n-2}+\underline{n-1}+\underline{n} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Esempio : $1+2+3+\dots+99+100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$

$$1+2+3+4+5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$$

Se k è dispari $\underbrace{(1+2+3+\dots+k-1)}+k = \frac{(k-1)(k)}{2}+k$

$$= \frac{k^2-k+2k}{2} = \frac{k^2+k}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2}$$

Esempio: Per ogni $p \geq 1$ per ogni $t > 0$ si ha

$$(1+t^p)^{1/p} \leq 1+t$$

$$\Downarrow$$

$\forall a, b > 0$ $$(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} \leq a+b$$

$$\begin{cases} p = 3 \\ t = \frac{b}{a} \end{cases} \qquad \left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right)^{1/3} \leq 1+\frac{b}{a}$$

$$\left(1+\frac{b^3}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b}{a}$$

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b}{a}$$

$a > 0$ $$\frac{1}{\cancel{a}} \cdot (a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a+b}{\cancel{a}} \Rightarrow (a^3+b^3)^{\frac{1}{3}} \leq a+b$$

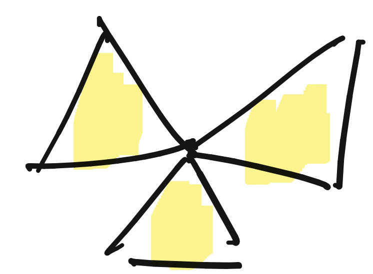
Esempio

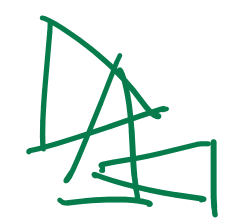
$$\frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{n} = \frac{1}{n}\left(v_1 + \dots + v_n\right)$$

Esempio Se $T_1, \dots, T_n$ sono n poligoni nel piano

$T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_1 \cap T_3 = \emptyset$, ...

$T_2 \cap T_3 = \emptyset$, $T_2 \cap T_4 = \emptyset$ ....





Se

Per ogni i t.c. $1 \leq i \leq n$ se $i \neq j$ $T_i \cap T_j = \emptyset$

Per ogni j t.c. $1 \leq j \leq n$

allora

$$\mathrm{Area}(T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n) = \mathrm{Area}(T_1) + \mathrm{Area}(T_2) + \dots + \mathrm{Area}(T_n)$$

Esempio $\quad E_\alpha = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \alpha \}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$

Definisce una famiglia di insiemi $E_0, E_1, E_{\frac{1}{4}}, E_\pi, E_{\sqrt{3}}, \dots$
indicata dai numeri reali

<u>Esercizio</u> $\quad$ Supponiamo di avere $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$
Vorrei indicare k oggetti in questo insieme scelti a caso.

$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad \text{non va bene!}$$

$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_k} \qquad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

questo è con ripetizioni

$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_k} \qquad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

$\forall u \ \ 1 \leq u \leq k$
$\forall v \ \ 1 \leq v \leq k \qquad i_u \neq i_v$

Esercizio Sia A un insieme di n poligoni nel piano a cui appartengono triangoli e quadrilateri. Indicare in maniera precisa tutti i vertici dei poligoni in A

$$A = \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \}$$

$$A = A_1 \cup A_2$$

$$k + r = n$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_1 = \{ P_{t_1}, P_{t_2}, \dots, P_{t_k} \} \qquad 0 \le k \le n \quad t_1, \dots, t_k \in \{1, \dots, n\}$$

$$A_2 = \{ P_{q_1}, P_{q_2}, \dots, P_{q_r} \} \qquad 0 \le r \le n \quad q_1, \dots, q_r \in \{1, \dots, n\}$$

A_1 contiene solo triangoli

A_2 contiene solo quadrilateri

$$\mathrm{Vert}(P_{t_i}) = \{ v_{t_i,1}, v_{t_i,2}, v_{t_i,3} \}$$

$$\mathrm{Vert}(P_{q_j}) = \{ v_{q_j,1}, v_{q_j,2}, v_{q_j,3}, v_{q_j,4} \}$$

$$V = \left\{ v_{u,w} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in \{t_1 \dots t_k\} \text{ e } 1 \le w \le 3 \\ \text{oppure} \\ u \in \{q_1 \dots q_r\} \text{ e } 1 \le w \le 4 \end{array} \right\}$$

Esercizio Siano k e $n \in \mathbb{N}$. Scrivere il generico sistema di n equazioni polinomiali a coefficienti in $\mathbb{R}$ in una incognita con polinomi di grado al più k.

$$\left\{ a_{i,j} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} a_{k,1}x^k + a_{k-1,1}x^{k-1} + \dots + a_{1,1}x + a_{0,1} = 0 \\ a_{k,2}x^k + a_{k-1,2}x^{k-1} + \dots + a_{1,2}x + a_{0,2} = 0 \\ \vdots \\ a_{k,n}x^k + a_{k-1,n}x^{k-1} + \dots + a_{1,n}x + a_{0,n} = 0 \end{cases}$$

n equazioni

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 4x^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Il generico polinomio di grado k si indica con

$$a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Sommatoria

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Esempio

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} \qquad a_i = \frac{1}{i}$$

Media aritmetica di $a_1, \ldots, a_n$ $\qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

Produttorie

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Esempio

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Proprietà

$$\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\dots+\frac{a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\left(a_1+\dots+a_n\right)$$

1) $$\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$\sum_{i=1}^{n}2i=2+4+6+\dots+2n$$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{n}i=2\left(1+2+\dots+n\right)$$

2) $$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\dots+c}_{n\text{ volte}}=n\cdot c$$

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=a_m+a_{m+1}+\dots+a_{n-1}+a_n \qquad m\leq n$$