Lezione del 24/10/23

1) Prodotto con una costante

$$\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

<u>Es</u> $ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3)$

2) Sommatoria con un termine costante

$$\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$$

più in generale

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1)c$$

3) Sommatorie con estremi uguali

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

4) Scomposizione di una sommatoria

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i$$

5) Traslazione degli indici

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+m}^{m+n} a_{i-m}$$

6) Riflessione degli indici

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$$

Proposizione

$$1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dim

$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \overset{6}{=} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)$$

$$\overset{3}{=} \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} + (n-\cancel{k}+1) = \sum_{k=1}^{n} (n+1)\cdot 1$$

$$\overset{1}{=} (n+1)\sum_{k=1}^{n} 1 \overset{2}{=} (n+1)\,n$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\,n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

Proposizione Sia $q \in \mathbb{R}$ con $q \neq 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Esempio Scegliamo $q = \frac{1}{2}$ $n = 3$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\parallel$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\parallel$$

$$\frac{8+4+2+1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{1-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{15}{\cancel{16}_{8}} \cdot \cancel{2} = \frac{15}{8}$$

Dim Osserviamo che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ è equivalente

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$

(perché abbiamo supposto $1-q\neq 0$, $q\neq 1$)

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \overset{1}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$$

$$\overset{5}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \overset{4}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right)$$

$$\overset{4}{=} 1 + \cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} - q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$

Esercizio Scrivere in forma compatta

$$9+15+21+27+33+39+45 = \sum_{i=1}^{7} 3(2i+1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 5 & 3\cdot 7 & 3\cdot 9 & 3\cdot 11 & 3\cdot 13 & 3\cdot 15 \\ \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2i+1 & 2i+1 & 2i+1 & 2i+1 & 2\cdot i+1 & & \\ \underline{i=1} & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 & i=6 & i=7 \end{array}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \frac{1}{16}$$

$$= \sum_{i=2}^{8} (-1)^i \frac{1}{2i}$$

Sugg. $(-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} = \sum_{i=2}^{8} \frac{1}{2i}$$

$$\frac{1}{2i} \qquad \frac{1}{2i}$$

$i=2$ $\quad i=3$ $\quad i=4$ $\quad i=5$ $\quad i=6$ $\quad i=7$ $\quad i=8$

$$-1 + \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{4} - 5 + \frac{1}{6} - 7 + \frac{1}{8} - 9 = \sum_{i=1}^{9} (-1)^{i}\, i^{(-1)^{i+1}}$$

$$1^{1} + (2)^{-1} + 3^{1} + (4)^{-1} + 5^{1} + (6)^{-1} + 7^{1} + (8)^{-1} + 9^{1} = \sum_{i=1}^{9} i^{(-1)^{i+1}}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \sum_{i=1}^{9} i$$

$$\sum_{i=1}^{9} i^{(-1)^{i+1}} = 1^{(-1)^{2}} + 2^{(-1)^{2+1}} + 3^{(-1)^{4}} + 4^{(-1)^{5}} \dots$$

$$1^{(-1)^{2}} = 1^{1}$$

$$2^{(-1)^{2+1}} = 2^{-1^{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$3^{(-1)^{4}} = 3^{1}$$

$$4^{(-1)^{5}} = 4^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{9} (-1)^{i}\, i^{(-1)^{i+1}}$$

Esercizio: Scrivere in forma estesa

$$\sum_{k=1}^{10} (k^2-k) = \sum_{k=1}^{10} k(k-1) = 0+2+6+12+20+30+42+56+72+90$$

Esercizio

La somma dei primi n numeri pari $\sum_{i=1}^{n} 2i$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i = \cancel{2}\left(\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right) = n(n+1)$$

La somma dei primi n numeri dispari $\sum_{i=1}^{n} (2i+1)$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i+1) = \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= n(n+1) + n = n(n+1+1) = n(n+2)$$

In alcuni casi la sommatoria può essere fatta su un insieme di indici arbitrario

$$J := \left\{ p \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} p \text{ primo} \\ p < 100 \end{array} \right\}$$

$$\sum_{i \in J} a_i \qquad \text{esempio:} \quad \sum_{i \in J} i$$

$f: I \to \mathbb{R}$ è una "legge" che associa ad ogni elemento di I uno ed un solo numero in $\mathbb{R}$

$f: I \to \mathbb{R}$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times \mathbb{R}$ tale che per ogni $i \in I$ esiste esattamente una coppia in f che comincia con i

dominio codominio

$$f \subseteq I \times \mathbb{R}$$

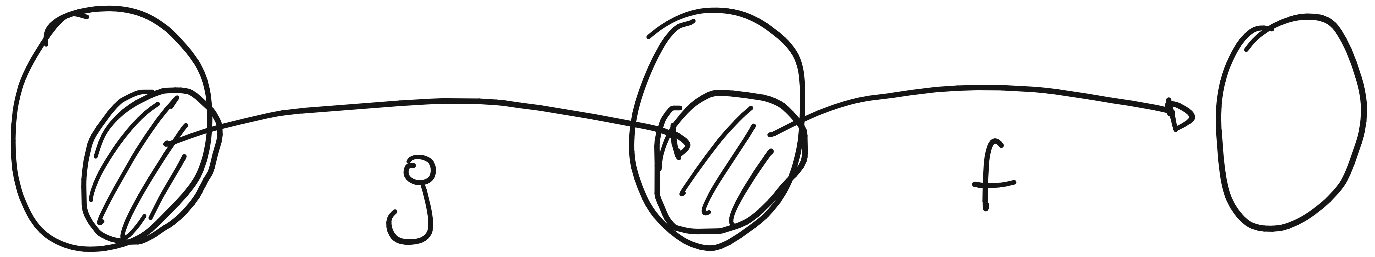
Esistono delle funzioni, dette elementari, che possono essere composte tra di loro

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\ )^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\log : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\vdots$

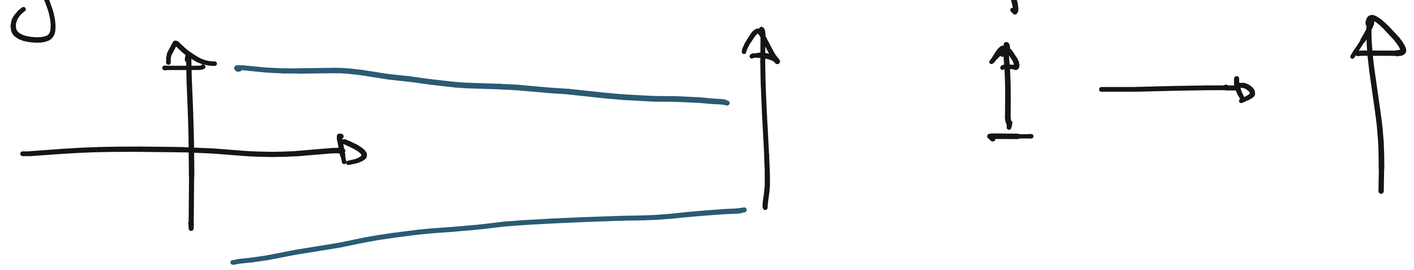
$f \circ g$ vuol dire applicare prima g all'input e poi applicare f al risultato ottenuto



$f \circ g$ è definita sugli x nel dominio di g per cui l'output appartiene al dominio di f

Esempio $\quad x - y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \sqrt{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$g \qquad\qquad\qquad\qquad f$



$$\sqrt{x-y} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Es $\quad 2^x + 3x^4$

$$\| $$

$$\ell(f(x), h \circ g(x))$$

$$x \xmapsto{f} 2^x$$

$$x \xmapsto[g]{} x^4 \xrightarrow[h]{} 3 \cdot x^4$$

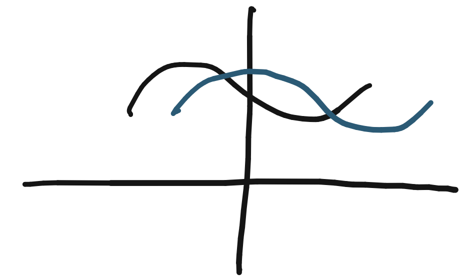
$$(x, y) \xmapsto{\ell} x + y$$

$$f(x) = \ell(f(x), h \circ g(x)) = f(x) + h \circ g(x) = 2^x + h(x^4) = 2^x + 3x^4$$

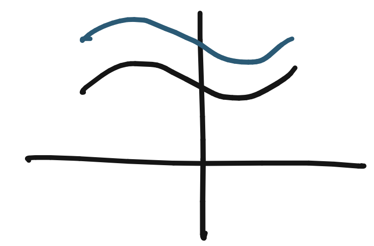
Esercizio

Sia $f(x) = 2^x + 3x^4$

Scrivere le seguenti funzioni composte



1) $\underset{f\circ g(x)}{\underset{\parallel}{f(x+1)}} = 2^{x+1} + 3(x+1)^4$ $\qquad g(x) = x+1$



2) $\underset{g\circ f(x)}{\underset{\parallel}{f(x)+1}} = 2^x + 3x^4 + 1$ $\qquad g(x) = x+1$

3) $f(2x) = 2^{2x} + 3(2x)^4$ $\qquad g(x) = 2x$

4) $2f(x) = 2\left(2^x + 3x^4\right)$

5) $f(-x) = 2^{-x} + 3(-x)^4$ $\qquad g(x) = -x$

$\quad \| $

$f \circ g(x)$

6) $-f(x) = -(2^x + 3x^4)$

$g \circ f(x)$

7) $f(x^2) = 2^{x^2} + 3(x^2)^4$ $\qquad g(x) = x^2$

8) $(f(x))^2 = f^2(x) = (2^x + 3x^4)^2 =$

Esercizio — Scrivere tutte le funzioni elementari che servono per ottenere

$$f(x) = 3 \cdot 4^{2(x+1)} - 2$$

$$g(x) = x+1$$
$$h(x) = 2x$$
$$l(x) = 4^x$$
$$m(x) = 3x$$
$$n(x) = x-2$$

$$(n \circ m \circ l \circ h \circ g)(x) = n(m(l(h(g(x)))))$$

Esercizio

$$f(x) = (2x+1)^3 + 3^x \qquad g(x) = \frac{4x-1}{5x+2}$$

Calcolare

$$f \circ g\,(x) = f\left(\frac{4x-1}{5x+2}\right) = \left(2\left(\frac{4x-1}{5x+2}\right)+1\right)^3 + 3^{\frac{4x-1}{5x+2}}$$

$$g \circ f\,(x) = g\left((2x+1)^3 + 3^x\right) = \frac{4\left((2x+1)^3 + 3^x\right) - 1}{5\left((2x+1)^3 + 3^x\right) + 2}$$

Esercizio: Dato $f(x)$ definiamo

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n\text{-volte}}$$

$f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f(x))$, $f_3(x) = f(f(f(x))) = f \circ f \circ f(x)$, ...

Calcolare $f_n(x)$ nei seguenti casi:

1) $f(x) = x+1$: $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = ff(x) = (x+1)+1 = x+2$

$f_3(x) = ((x+1)+1)+1 = x+3$

$f_n = x+n$

2) $f(x) = 2x$ $\qquad f_n(x) = \underbrace{2\cdot(2\cdot\dots\cdot 2)}_{n \text{ volte}}x = 2^n x$

3) $f(x) = x^2$

$$f_n(x) = x^{2^n}$$

$$f_1(x) = x^2 \;, \quad f_2(x) = (x^2)^2 \;, \quad f_3(x) = \left(\left(x^2\right)^2\right)^2 = x^{2^3}$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad f_3(x) = \frac{1}{x}$$

$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ infatti $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1} = x$ infatti $\dfrac{1}{x} \cdot x = 1$