Lezione del 31/10/23

Esercizio

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) Calcolare la somma dei quadrati degli interi da 1 a 100

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 = \frac{100\,(101)\,(201)}{6}$$

2) Calcolare la somma

$$1^2+2^2+3^2+\dots+(2n+1)^2 = \sum_{i=1}^{2n+1} i^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}$$

1) Prodotto con una costante $\sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

<u>Es</u> $ca_1 + ca_2 + ca_3 = c(a_1 + a_2 + a_3)$

2) Sommatoria con un termine costante $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$ più in generale

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$$

3) Sommatorie con estremi uguali $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$

4) Scomposizione di una sommatoria $\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i$

5) Traslazione degli indici $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+m}^{n+m} a_{i-m}$

6) Riflessione degli indici $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

1) $$\prod_{k=m}^{n} (c \cdot a_k) \overset{?}{=} c^{(n-m+1)} \prod_{k=m}^{n} a_k$$

2) $$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$$

3) $$\prod_{k=1}^{m} a_k \cdot \prod_{k=m+1}^{m+n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{m+n} = \prod_{k=1}^{m+n} a_k$$

4) $$\prod_{k=1+m}^{m+n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{k+m}$$

5) $$\prod_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Esercizio

(*) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

ottenere $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

applichiamo (*) con $\beta := -\beta$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

$$= \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$f(x) = f(-x)$ f è pari

$f(-x) = -f(x)$ f dispari

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

Esercizio

$$f(x) = \sqrt{3(4-x)} + 1$$

$$x \overset{g}{\longmapsto} 4-x$$

$$x \overset{h}{\longmapsto} 3x$$

$$x \overset{l}{\longmapsto} \sqrt{x}$$

$$x \overset{m}{\longmapsto} x+1$$

$$f(x) = m(l(h(g(x))))$$

$$= m \circ l \circ h \circ g\,(x)$$

Esercizio

$f(x) = x^3 + 2x$ è dispari ?

$-x^3 - 2x = -(x^3+2x) = -f(x) = f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x$

$f(x) = 4x^2 - 5$ è pari ?

$4x^2 - 5 = f(x) = f(-x) = 4(-x)^2 - 5 = 4x^2 - 5$

$f(x) = 4x^2 + x$ è pari ? è dispari ?

$4x^2 + x = f(x) \overset{?}{=} f(-x) = 4(-x)^2 + (-x) = 4x^2 - x$

$-4x^2 - x = -f(x) \overset{?}{=}$

$f(x) = f(-x)$ $\quad f$ è pari

$f(-x) = -f(x)$ $\quad f$ dispari

$\cos(-x) = \cos x$

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) \text{ è } \begin{cases} \text{pari se } g \text{ è pari} \quad \text{ok} \\ \text{dispari se } g \text{ è dispari e } f \text{ è dispari} \quad \text{ok} \\ \text{pari se } g \text{ è dispari e } f \text{ è pari} \end{cases}$$

Se g è pari vuol dire che $g(-x) = g(x)$. Ma allora

$$f\circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f(g(x)) = f\circ g(x)$$

Se f e g sono dispari $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$

$$f\circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f(g(x))$$

Se f è pari $f(-x) = f(x)$ e g dispari $g(-x) = -g(x)$

$$f\circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f(g(x)) = f\circ g(x)$$

Esercizio

$f(x) = x + 1$ $\qquad -f(x) = -x-1 \qquad f(-x) = -x+1$

$f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\qquad -f(x) = -\frac{1}{x^3} = f(-x)$

$f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$ $\qquad f(-x) = \operatorname{sen}(-2x)\cos(-x)$ dispari

$= -\operatorname{sen}(2x)\cos(x) = -f(x)$

$f(x) = x^3 \operatorname{sen} x$ $\qquad f(-x) = (-x)^3 \operatorname{sen}(-x) =$

$= -x^3(-\operatorname{sen}(x)) =$ pari

$= x^3 \operatorname{sen} x = f(x)$

$\forall n \; \exists m \; (n = 2m)$

$\exists m \, (n = 2m) = P(n)$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

i è vincolata
saturata

$n = 3$

$$f(3) = \sum_{i=1}^{3} i^2 = 14$$

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 14$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = f(n)$$

$$f(i,n) = i \cdot n$$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot n$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^2$$

OK

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)\,n}$$

non va bene

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)\,n}$$

$$\parallel$$

$$f(n, x)$$

OK

$$f_n(y) = \frac{x}{(1+x^2)\,n}$$

non va bene

$$\sum_{i=1}^{n} i \qquad \sum_{i=1}^{n} n$$

Esempio

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$A_n = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

dipende da n

dipende da k e non dipende da n

Def Una <u>successione</u> a valori in un insieme B è una funzione da $\mathbb{N}$ in B

$$a : \mathbb{N} \to B \qquad a(n) = a_n \in B$$

$\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ sono i valori assunti dalla successione a

$$a_n = (-1)^n \qquad \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{+1, -1\}$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{+1, -1\}$$

$$a_2 = (-1)^2 = 1$$
$$b_2^{+} = (-1)^3 = -1$$

$$b_n = (-1)^k \qquad b_n = \sum_{m=1}^{k} m^2$$

Quando si prendono unioni o intersezioni di famiglie di insiemi si scrive

$$A(n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

vincola la variabile i

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$$

non dipende da nessuna variabile

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

non dipende da nessuna variabile

Data $f(x)$ si può scrivere $\lim_{x \to 3} f(x) \in \mathbb{R}$

vincola la variabile x

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \in \mathbb{R} \qquad \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dx = g(y)$$

I simboli

$$\sum_{i=1}^{5} \qquad \bigcup_{n=1}^{+\infty} \qquad \lim_{x \to 4} \qquad \int_{-1}^{2} dx$$

vincolano le variabili che menzionano

Attenzione

$f(x) = 5$ è coerente se pensata come funzione costante

Esercizio

$$\sum_{k=0}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

dipende da n e da i

dipende da n

$$\sum_{k=0}^{10} a_{k+1} = \sum_{n=1}^{11} a_n \qquad ✓$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{j=n}^{+\infty} B_j \qquad ✓$$

dipende da n

dipende da n

$$B_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$ ✗

dipende da k

non dipende da nessuna variabile

$$B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$$ ✓

dipende da k

dipende da k

$$h(t) = \int_a^b f(t)\,dt$$ ✗

dipende da t

dipende da a e b

x, y, z, u, v — variabili

a, b, c, k — costanti

$$\lim_{x \to 2} f(x) = c$$

non dipende da nessuna variabile

una qualche costante in $\mathbb{R}$

Consideriamo $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per $i = 1, 2, \dots, n$ assegnati

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ fissati

$$\underbrace{\int_a^b \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)}_{\text{dipende da } n \text{ e da } x} \Big) dx}_{\text{dipende da } n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_a^b f_i(x)\, dx}_{\text{dipende da } i}}_{\text{dipende da } n}$$