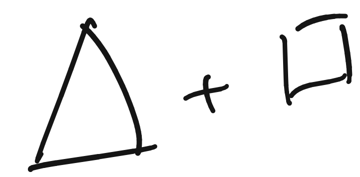
Lezione del 2/11/23

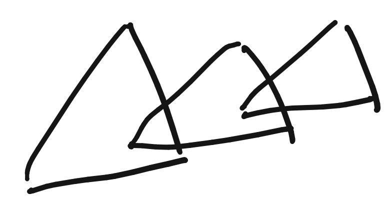
__Esercizio__ Sia $\{E_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di poligoni nel piano

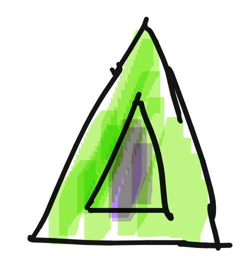
Sia $|E_n|$ l'area del poligono E_n

(a) $\left|\sum_{i=1}^{n} E_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |E_i|$ $\times$

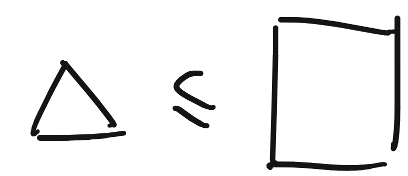


(b) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |E_i|$





(c) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \leq \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$ $\times$

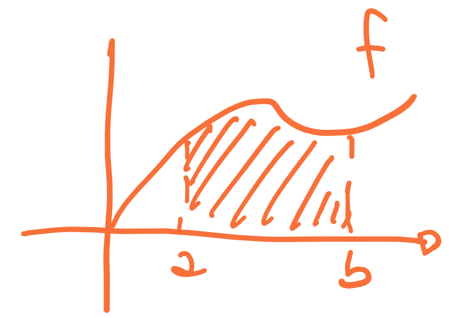


(d) $\left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right| \subseteq \left|\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right|$ $\times$

__Esercizio__ f, g, h, f: sono funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a, b, e sono costanti in $\mathbb{R}$

(a) $\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{h(t)} = \int_a^b f(t)\, dt$ $\in \mathbb{R}$ $\times$



(b) $g(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ $\times$ $\int_a^x f(t)\, dt$

(c) $\underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{f(x)} = \int_x^a \underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{g(t)}\, dt$ $\checkmark$

(d) $\lim_{x \to 0} f(t) = \underset{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{g(x)}$ $\times$

(e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \underset{\mathbb{R}}{f}(x) = c \in \mathbb{R}$ ✓

(f) $$\underbrace{\lim_{x \to c} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right)}_{\text{dipende solo da } n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{x \to c} f_i(x) \right)}_{\text{dipende solo da } n}$$

dipende solo da i

Principio di induzione

È una tecnica che serve a dimostrare frasi del tipo

Per ogni $n \geq n_0$ vale la proprietà $P(n)$

[Prendo $n \in \mathbb{N}$ t.c $n \geq n_0$ e dimostro che n ha la proprietà P]

Per induzione invece

1) Mostro che n_0 ha la proprietà
2) Mostro che se un numero k ha la proprietà P allora anche il suo successore $k+1$ ha la proprietà P

Esempio Per ogni $n \geq 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Dimostriamolo per induzione:

Passo base Verifico per $n=1$

$$1 = \sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Passo induttivo Verifico che se la proprietà vale per qualche n allora vale anche per $n+1$

Per ipotesi induttiva vale

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\bar{n}} k^2 = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1)}{6}}$$

$$\bar{n} \overset{?}{\Longrightarrow} \bar{n}+1$$

Dobbiamo dimostrare che vale

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k^2 = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)(2(\bar{n}+1)+1)}{6} \quad (*) \qquad ?$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k^2 = \sum_{k=1}^{\bar{n}} k^2 + (\bar{n}+1)^2$$

$$= \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)(2\bar{n}+1)}{6} + (\bar{n}+1)^2 = (\bar{n}+1)\left(\frac{\bar{n}(2\bar{n}+1)}{6} + \bar{n}+1\right) =$$

$$= (\bar{n}+1)\left(\frac{2\bar{n}^2+\bar{n}+6\bar{n}+6}{6}\right) = (\bar{n}+1)\left(\frac{2\bar{n}^2+7\bar{n}+6}{6}\right) =$$

$$= \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)(2\bar{n}+3)}{6} = (*)$$

Esempio Disuguaglianza di Bernoulli $\forall n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Dimostrazione per induzione su n

Passo base $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$ ✓

$$\underset{1}{\overset{\shortparallel}{(1+x)^0}} \geq 1$$

Passo induttivo Suppongo che l'equazione sia vera per $\bar{n}$
e dimostro che è vera per $\bar{n}+1$ $\quad P(\bar{n}) \Rightarrow P(\bar{n}+1)$

Per ipotesi induttiva $(1+x)^{\bar{n}} \geq 1 + \bar{n}x$ se $x \geq -1$
Vorremmo arrivare a

$$(1+x)^{\bar{n}+1} \overset{?}{\geq} 1 + (\bar{n}+1)x$$

$$(1+x)^{\bar{n}} \geq 1+\bar{n}x \qquad \text{se} \qquad x \geq -1 \iff x+1 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(1+x)^{\bar{n}} \cdot (1+x) \geq (1+\bar{n}x)(1+x)$$

$$\|$$

$$(1+x)^{\bar{n}+1} \geq 1+\bar{n}x^2+x+\bar{n}x = 1+(\bar{n}+1)x+\bar{n}x^2 \geq 1+(\bar{n}+1)x$$

Esercizio $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \geq 1$

Dimostrazione per induzione

Passo base $(n=1)$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1, \qquad \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Passo induttivo $(P(\bar{n}) \Rightarrow P(\bar{n}+1))$ Suppongo che valga

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} k = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1)}{2}$$

e dimostro che vale

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} k = \sum_{k=1}^{\bar{n}} k + \bar{n}+1 = \frac{\bar{n}(\bar{n}+1) + 2(\bar{n}+1)}{2} = \frac{(\bar{n}+1)(\bar{n}+2)}{2}$$

Esercizio Dimostrare per induzione che

1) $$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1) \qquad \forall n \geq 1$$

2) $$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

3) $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall n \geq 0 \text{ e } q \in \mathbb{R} \text{ con } q \neq 1$$

[Dove si usa il fatto che $q^0 = 1$]

Teorema Tutti i numeri naturali sono uguali.

Dim Proviamo per induzione che dati n numeri naturali questi sono tutti uguali

Passo base Se $n=1$ $\{a_1\}$ ✓

Passo induttivo Suppongo che ogni insieme di n numeri naturali contenga tutti numeri uguali e mostro che anche ogni insieme di $n+1$ numeri naturali contiene tutti numeri uguali

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}\}$$

Per ipotesi induttiva $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ $a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{n+1}$

Quindi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}$