Lezione del 7/11/23

Def Sia $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Chiameremo **naturale** una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

Esempi

1) Identità $n \longmapsto n$
2) $n \longmapsto n^2$
3) $n \longmapsto n + 10$

Esempi negativi

1) $n \longmapsto -n$
2) $n \longmapsto n^{-2} = \frac{1}{n^2}$

$n \longmapsto 3n - 6$ non è naturale

$n \longmapsto$ la somma delle cifre decimali di n naturale

Se $f(n)$ è una funzione naturale è vero che $2f(2n)-1$ è naturale?

Se $f(n)$ è naturale è vero che $f(2n)$ è naturale?

$f(2n) : \quad \mathbb{N} \xrightarrow{2n} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$

Se f e g sono funzioni naturali allora $f \circ g$ è naturale ?

$f \circ g : \quad \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$

Se f, g, h sono naturali allora $(f \circ g) \circ h$ è naturale

$2(f(2n)) : \quad \mathbb{N} \xrightarrow{2n} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{2n} \mathbb{N}$

Affinché $2f(2n) - 1$ sia naturale è necessario che
$2f(2n) > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Ma $f(2n) \geq 1$ perché $f(2n)$ è naturale e quindi
$2f(2n) \geq 2 \implies 2f(2n) > 1$

Se f è naturale è vero che $f \circ f(n)$ è naturale?

È vero che ogni funzione naturale soddisfa
$$f(n) \leq f(n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ci serve una funzione f naturale e tale che c'è almeno un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ per cui $f(n) > f(n+1)$

$$f(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 1 \\ 4 & \text{se } n = 2 \\ 10 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

$$f(1) > f(2)$$

È possibile che una funzione naturale soddisfi

$= (m \cdot n)^2$ $\qquad$ $m^2 \cdot n^2$

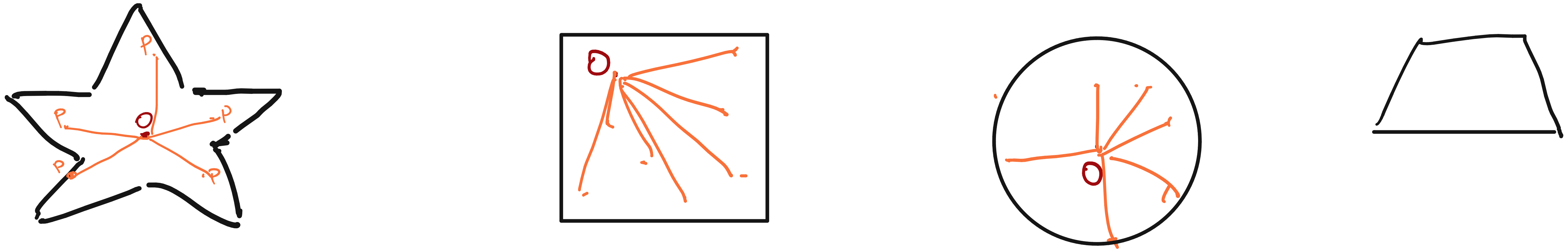
$$f(m \cdot n) = f(m)\, f(n) \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N} \ ?$$

Possibile : Dare una f naturale $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

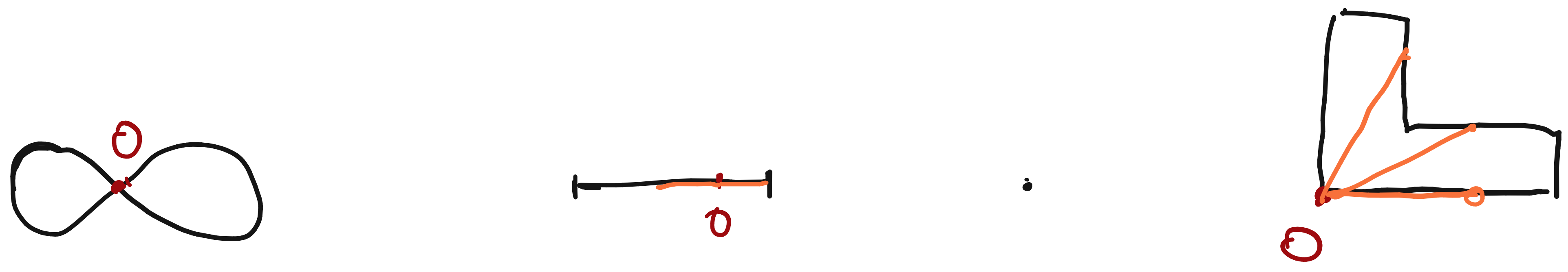
Impossibile : $\forall f$ naturale $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ $f(m \cdot n) \neq f(m) \cdot f(n)$

Def Un insieme di punti A non vuoto è detto stellato se esiste un punto $O \in A$ tale che $\forall P \in A$ il segmento $OP \subseteq A$.

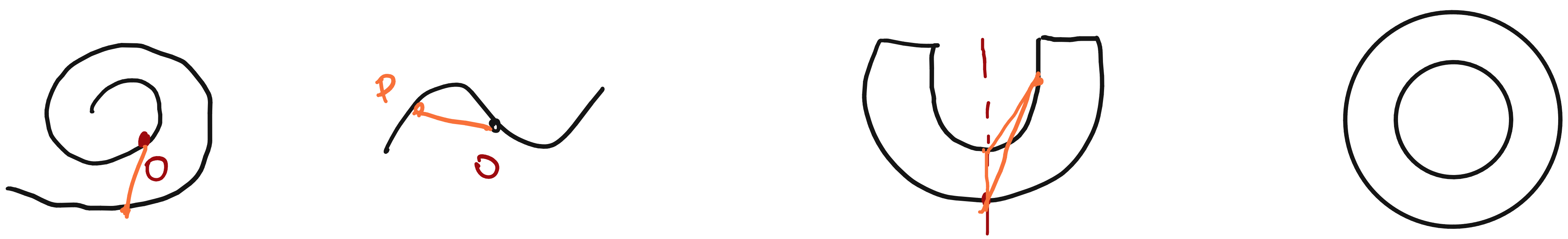
esempi :



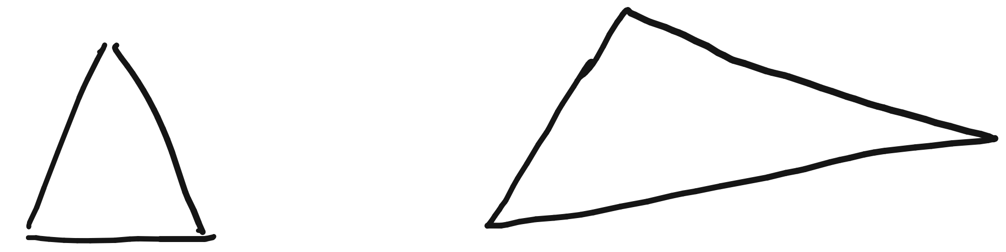
esempi :



controesempio :



a Un triangolo è stellato?

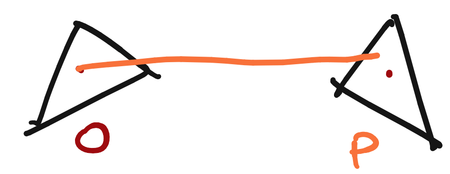


Sì!

b) Quali sono gli insiemi stellati con un numero finito di punti?

L'unico insieme stellato finito è un punto.

c) L'unione di due insiemi stellati è stellata



d) Un sottoinsieme di un insieme stellato è necessariamente stellato?

Def Diremo che un numero naturale è privo di quadrati se non è divisibile per nessun quadrato diverso da 1,

esempi :

controesempi:

a) È vero che se due numeri sono privi di quadrati lo è anche il loro prodotto?

b) È vero che se due numeri sono privi di quadrati lo è anche la loro somma?

c) È vero che se due numeri sono primi e distinti, il loro prodotto è privo di quadrati?

d) È vero che se un numero è privo di quadrati allora lo sono tutti i suoi divisori?

e) È vero che se un numero non è privo di quadrati allora non è primo