Lezione del 7/12/23

Esercizio 7 (3 punti). Negare le seguenti affermazioni:

(1) Esiste una retta che interseca p e q, $\overset{e}{\text{ma}}$ non r.

Ogni retta non interseca p oppure non interseca q oppure interseca r

(2) Per ogni numero reale x si ha $f(x) \leq 5$.

(3) L'equazione (*) ha al più tre soluzioni.

(4) p è un numero primo minore di 10.

(5) Il triangolo Q e il quadrato P hanno almeno un lato in comune.

(6) Esiste un punto che non appartiene alla retta p, né alla retta g.

1) $\sim(\exists \ell \, (I(\ell,p) \wedge I(\ell,q) \wedge \sim I(\ell,r))) \equiv$

$\forall \ell \sim (I(\ell,p) \wedge I(\ell,q) \wedge \sim I(\ell,r)) \equiv$

$\forall \ell \, (\sim I(\ell,p) \vee \sim I(\ell,q) \vee \cancel{\sim\sim} I(\ell,r))$

2) $\sim(\forall x \in \mathbb{R} \, (f(x) < 5 \vee f(x) = 5)) \equiv \exists x \in \mathbb{R} \, (\sim (f(x) < 5 \vee f(x) = 5)) \equiv$

$\exists x \in \mathbb{R} \, (f(x) \not< 5 \wedge f(x) \neq 5) \equiv \exists x \in \mathbb{R} \, (f(x) > 5)$

3) L'equazione (*) ha al più 3 soluzioni

$$\sim(S_0(*) \vee S_1(*) \vee S_2(*) \vee S_3(*)) \equiv$$

$$\sim S_0(*) \wedge \sim S_1(*) \wedge \sim S_2(*) \wedge \sim S_3(*)$$

L'equazione (*) ha almeno 4 soluzioni

4) p è un numero primo minore di 10

$$\sim\left(P_r(p) \wedge p<10\right) \equiv \sim P_r(p) \vee \sim(p<10) \equiv \sim P_r(p) \vee p \geq 10$$

p non è primo oppure è maggiore eguale a 10

5) L_0, L_1, L_2, L_3, ... Il triangolo P e il quadrato Q non hanno lati in comune

6) $$\sim\left(\exists x\, (\sim A(x,p) \wedge \sim A(x,g))\right) \equiv \forall x \sim(\sim A(x,p) \wedge \sim A(x,y)) \equiv$$

$$= \forall x\, A(x,p) \vee A(x,y)$$

Esercizio 8 Dati due insiemi A e B con lo stesso numero di elementi n chiamiamo scarsa una funzione $f: A \to B$ che non è né iniettiva né suriettiva.

1) Scrivere esempi e controesempi di insiemi A e B e funzioni scarse tra di essi.
2) È vero che se $f: A \to B$ non è suriettiva allora è scarsa?
3) È vero che se A, B, C hanno lo stesso numero di elementi e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ è scarsa allora $g \circ f$ è scarsa?
4) Siano A e B insiemi di 3 elementi e $f: A \to B$ e $g: A \to B$ scarse. È vero che deve esistere $a \in A$ t.c. $f(a) = g(a)$

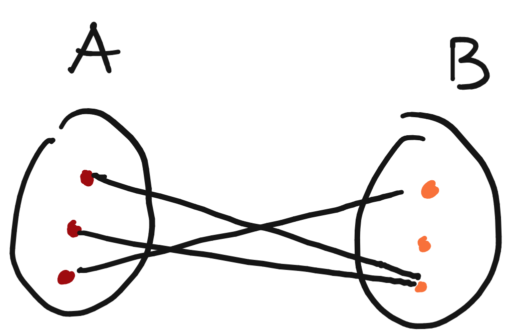
iniettiva $\forall x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

non iniettiva $\exists x, y \quad x \neq y$ e $f(x) = f(y)$

suriettiva $\forall y \in B \ \exists x \in A \ f(x) = y$

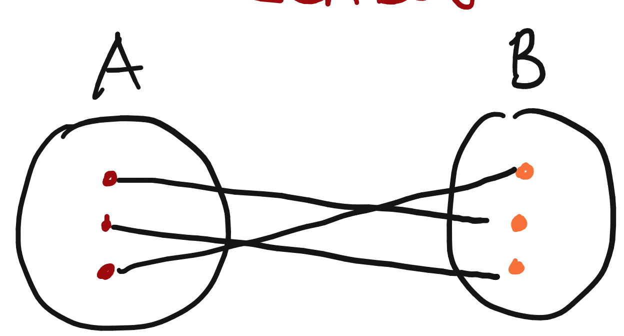
non suriettiva $\exists y \in B \ \forall x \in A \ f(x) \neq y$

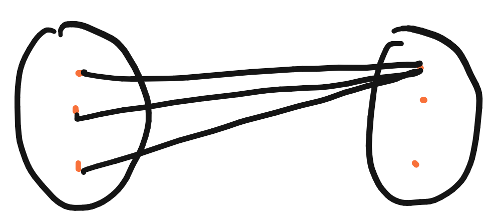
SCARSE

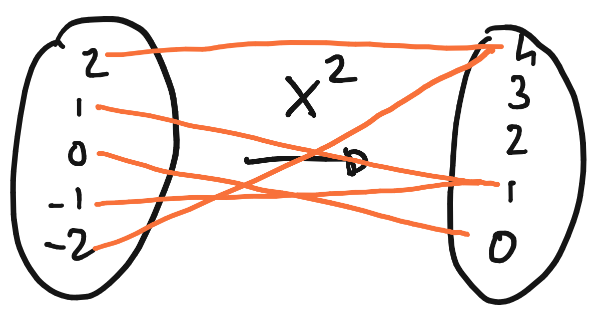


non iniettiva
non suriettiva

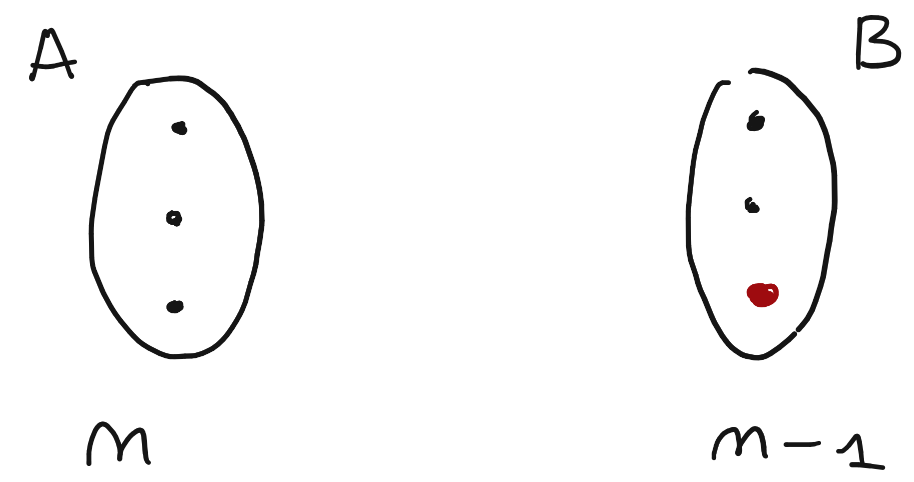
NON SCARSE





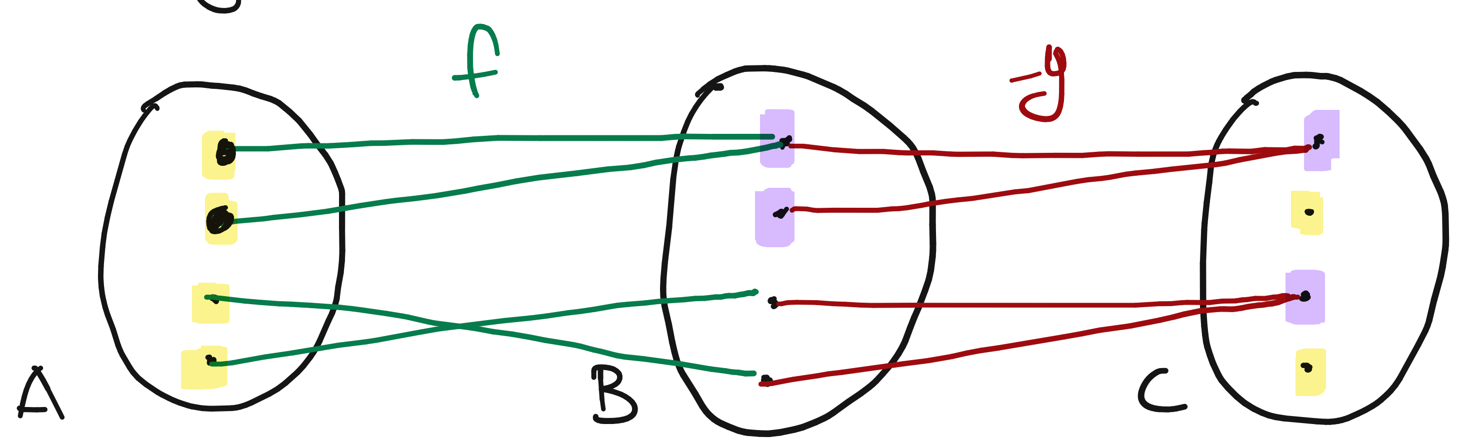


2) È vero che se f non è suriettiva allora è scorsa?



Si è vero perché se f non è suriettiva ho a disposizione al più $n-1$ elementi in cui mandare gli elementi di A che sono n. Dunque almeno 2 devono andare nello stesso elemento.

3) È vero che se A, B, C hanno lo stesso numero di elementi, $f: A \to B$, $g: B \to C$ sono scorse allora $g \circ f$ è scorsa?



Osserviamo che siccome f e g sono scorse si ha

$\exists\, x, y \in A \quad x \neq y$ e $f(x) = f(y)$ (f non è iniettiva)

$\exists\, z \in C \ \forall\, u \in B \quad z \neq g(u)$ (g non è suriettiva)

$g \circ f$ è iniettiva? $\quad g\circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y)$

No!

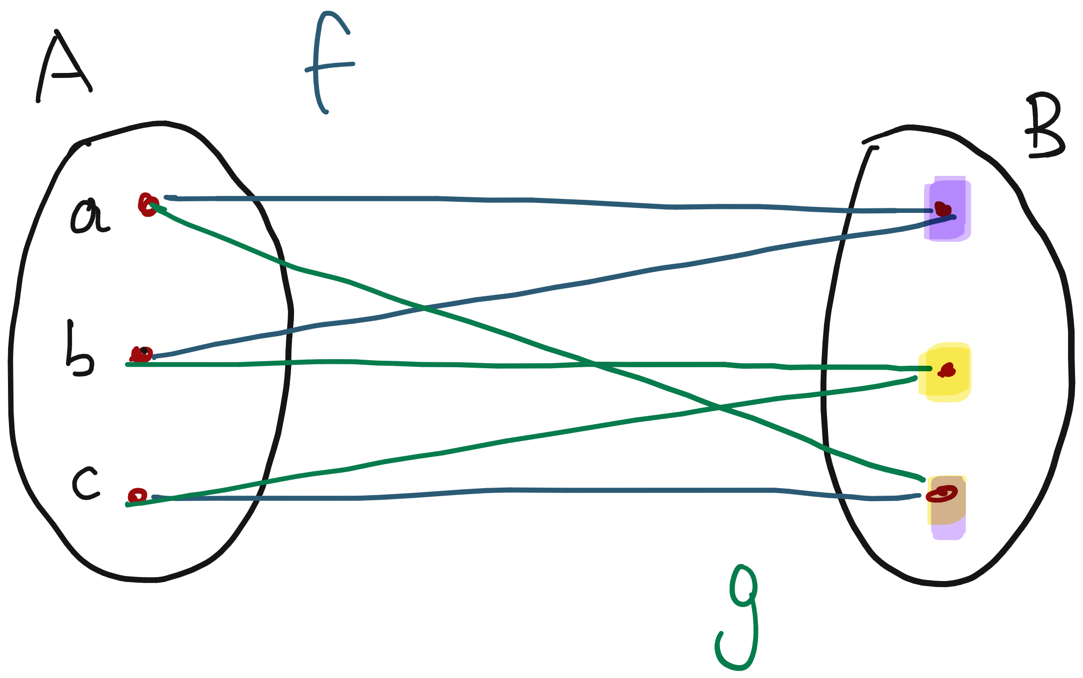
$g \circ f$ è suriettiva? $\quad \exists\, z \in C \ \forall\, u \in B \quad z \neq g(u)$

No! $\quad \forall\, z \in C \ \exists\, x \in A \quad g\circ f(x) = z$?

$$g(\underbrace{f(x)}_{u}) = z \qquad f(x) \in B$$

Sì, se f e g sono scorse anche $g\circ f$ lo è.

4)



f e g scorse $\Rightarrow \exists\, a \in A$

$f(a) = g(a)$

Esercizio 9 Di ciascuna uguaglianza dire se è sintatticamente corretta oppure no

1) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{j=n}^{\infty} B_j$ sì

2) $B_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ NO

$\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

3) $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ sì

Esercizio 10 Siano $f(x) = x^2 - 2^{x+1}$ e $g(x) = \text{sen}(x^2+2)$

scrivere

1) $f(x+1) = (x+1)^2 - 2^{x+1+1}$

2) $f(g(x)) = (\text{sen}(x^2+2))^2 - 2^{\text{sen}(x^2+2)+1}$

3) $g(f(x)) = \text{sen}((x^2 - 2^{x+1})^2 + 2)$

4) $f(2x) + g(x^2) = 4x^2 - 2^{2x+1} + \text{sen}(x^4 + 2)$