1) PER CIASCUNO DEI SEGUENTI ENUNCIATI (FORMULE CHIUSE), MOSTRARE CHE È SODDISFACIBILE, MA NON LOGICAMENTE VALIDO

a) $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x \neg P(x))$

- **SODD.:** $\mathfrak{A}: A=\{0,1\}$, $P^{\mathfrak{A}}=\{0\}$,
  - $\mathfrak{A} \models \exists x P(x)$ PERCHÉ ESISTE $a \in A$ T.C. $\mathfrak{A} \models P(a)$, CIOÈ T.C. $a \in P^{\mathfrak{A}}=\{0\}$ (OVVERO $a=0$)
  - $\mathfrak{A} \models \exists x \neg P(x)$ PERCHÉ C'È UN ELEM. NEL COMPLEM. DI $P^{\mathfrak{A}}$
- **NON LOGICAM. VALIDA:** $A=\{*\}$, $P^{\mathfrak{A}}=\{*\}=A$

  NON CI SONO ELEM. NEL COMPLEM. DI $P^{\mathfrak{A}}$

---

b) $[\underbrace{\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))}_{\text{SIMMETRIA}} \wedge \underbrace{\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))}_{\text{TRANSITIVITÀ}}] \rightarrow \underbrace{\forall x R(x,x)}_{\text{RIFLESSIVITÀ}}$

- **SODD:** BASTA CHE SIA VERO $\forall x R(x,x)$:

  $A=\{*\}$, $R^{a}=\{(*,*)\}=A \times A$ (ANCHE $A=\emptyset$)

- **NON LOGICAM. VALIDA:** LA RIFLESSIVITÀ NON SEGUE DALLE PRIME DUE (ANCHE SE SEMBRA DI SÌ: $R(x,y) \overset{\text{SIMM.}}{\Rightarrow} R(y,x) \overset{\text{TRANS.}}{\Rightarrow} R(x,x)$), ALTRIMENTI NON CI SAREBBE NELLA DEF. DI RELAZIONE DI EQUIVALENZA. INFATTI...

  $A=\{*\}$, $R^{a}=\emptyset \subseteq A \times A$

  - **SODDISFA LE PRIME DUE:**
    - FISSATI $x$ E $y$, "SE $R(x,y)$, ALLORA..." È VERA, POICHÉ È FALSA "$R(x,y)$"

- FISSATI $x, y, z$, "SE $R(x,y) \land R(y,z)$, ALLORA..." È VERA, POICHÉ "$R(x,y) \land R(y,z)$" È FALSA
- <u>MA NON LA RIFLESSIVITÀ</u>: FISSATO $x$, NON È VERO CHE $R(x,x)$

[OSS. SIMM. + TRANS. + $\boxed{\exists x \exists y R(x,y)}$ $\to$ RIFL. RELAZ. NON VUOTA

---

c) $(\forall x P(x)) \to (\exists x P(x))$

- <u>SODD.</u>: $A = \{*\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{*\} = A$

  È VERA L'IMPLICAZ. PERCHÉ È VERA $\exists x P(x)$

- <u>NON LOGICAM. VALIDA</u>: $A = \emptyset$, $P^{\mathcal{A}} = \emptyset = A$

  OGNI ELEM. SODDISFA $P$, MA NON C'È ALCUN ELEMENTO CHE LA SODDISFI

---

d) $\underbrace{(\exists x P(x) \land \exists x Q(x))}_{\text{C'È UN ELEM. CHE SODDISFA } P\text{, C'È UN ELEM. CHE SODDISFA } Q} \to \underbrace{\exists x (P(x) \land Q(x))}_{\text{C'È UN ELEM. CHE SODDISFA CONTEMPOR. } P \text{ E } Q}$

- <u>SODD.</u>: $A = \{*\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{*\} = A$

  $\mathcal{A} \models \exists x (P(x) \land Q(x))$: ESISTE $a \in A$ T.C. $\mathcal{A} \models P(a) \land Q(a)$ CIOÈ T.C. $a \in P^{\mathcal{A}}$ E $a \in Q^{\mathcal{A}}$ (BASTA PRENDERE $a = *$)

- <u>NON LOGICAM. VALIDA</u>: $A = \{0, 1\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{0\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{1\}$

---

RICORDA: $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ $\mathcal{L}$-STRUTTURE CON DOMINIO $A_i$, $\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO SU $I$

$\rightsquigarrow$ $\prod_{i\in I} A_i / \mathcal{U}$, CON $(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I}$ SSE $\{i\in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$

È $\mathcal{L}$-STRUTTURA

---

2) $A$ INSIEME FINITO, $\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO SU INSIEME $I$

MOSTRARE CHE L'IMMERSIONE CANONICA

$$A \longrightarrow \prod_{i\in I} A / \mathcal{U}$$

$$a \longmapsto [a^*], \quad \text{CON} \quad (a^*)_i = a \ \forall i\in I$$

È BIETTIVA

SOL.

• INJ. $a \neq b \in A$ T.C. $[a^*] = [b^*]$, CIOÈ $a^* \sim b^*$, CIOÈ

$$\phi = \{i\in I \mid \underbrace{(a^*)_i}_{a \ \forall i\in I} = \underbrace{(b^*)_i}_{b \ \forall i\in I}\} \in \mathcal{U} \quad \lightning$$

POICHÉ $a\neq b$

• SURJ. $[(b_i)_{i\in I}] \in \prod_{i\in I} A / \mathcal{U}$.

$A$ FINITO: SUPPONIAMO $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$\forall\, k = 1, \dots, n$, DEFINIAMO

$$B_k := \{ i \in I \mid b_i = a_k \} \in \mathcal{P}(I)$$

$\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO

SI HA $\quad B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = I \in \mathcal{U}$

PER OGNI $i$,
$b_i$ STA IN $A$,
QUINDI DEVE
ESSERE UGUALE
AD UN QUALCHE $a_k$

$\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO

$\Longrightarrow \quad \exists\, \bar{k} \in \{1, \dots, n\}$ T.C.

$$\{ i \in I \mid b_i = \underbrace{a_{\bar{k}}}_{(a_{\bar{k}}^*)_i} \} = B_{\bar{k}} \in \mathcal{U}$$

OVVERO $\boxed{(b_i)_{i \in I} \sim a_{\bar{k}}^*}$, CIOÈ

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \prod_{i \in I} A \Big/ \mathcal{U} \\ a_{\bar{k}} &\longmapsto [a_{\bar{k}}^*] = [(b_i)_{i \in I}] \end{aligned}$$

COROLLARIO AL TEOREMA DI ŁOŚ:

SE $\Gamma$ INSIEME (COERENTE) DI FORMULE NEL LINGUAGGIO $\mathcal{L}$ E $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ $\mathcal{L}$-STRUTTURE t.c. $\mathfrak{A}_i \models \Gamma \ \forall i$, ALLORA, PER OGNI ULTRAFILTRO $\mathcal{U}$, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U} \models \Gamma$

DUNQUE... CLASSI ASSIOMATIZZABILI AL PRIM'ORDINE SONO CHIUSE PER ULTRAPRODOTTI

3) LA CLASSE DEGLI INSIEMI BEN ORDINATI NON È ASSIOMATIZZ. AL PRIM'ORDINE

OGNI SOTTO

SOL. SE PER ASSURDO ASSIOMATIZZABILE,

CONSIDERO $(\mathbb{N}, \leq)$ ← INSIEME BEN ORDINATO

COROLL. ŁOŚ $\Longrightarrow$ L'ULTRAPRODOTTO (ULTRAPOTENZA)

$$\prod_{i\in I} (\mathbb{N}, \leq) / \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U} \text{ ULTRAFILTRO SU } I$$

È ANCORA UN INSIEME BEN ORDINATO

(RICORDA CHE LA RELAZIONE $\leq$ SULL'ULTRAPOTENZA È DEFINITA COME

$$[(a_i)_{i\in I}] \leq [(b_i)_{i\in I}] \iff \{i\in I \mid a_i \leq b_i\} \in \mathcal{U} \text{ )}$$

MA, SE SCELGO $I = \mathbb{N}$ E $\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO NON PRINCIPALE (ALTRIMENTI L'ULTRAPOTENZA SAREBBE ANCORA $(\mathbb{N}, \leq)$)...

ESISTE PER TEO. ULTRAF. $\mathcal{P}_{cof}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U}$

HA LA FIP

IN $\prod_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{N}, \le)/\mathcal{U}$ HO LA SEQUENZA

$$t_0 := [(0, 1, 2, \dots)]$$

$$t_1 := [(0, 0, 1, 2, \dots)]$$

$$t_2 := [(0, 0, 0, 1, 2, \dots)]$$

$$\vdots$$

$$t_n := [(\overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ ZERI}}, 0, 1, 2, \dots)]$$

$$\begin{array}{cccccccc} \ge & \ge & \ge & \ge & \ge & \ge & \ge & \dots \end{array}$$

$$t_{n+1} := [(\underbrace{0, \dots, 0, 0}_{n+1 \text{ ZERI}}, 0, 1, 2, \dots)]$$

- $t_{n+1} \le t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, POICHÉ

$$\{i \in I \mid (t_{n+1})_i \le (t_n)_i\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$$

- $t_{n+1} \ne t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, POICHÉ

$$\{i \in I \mid (t_{n+1})_i = (t_n)_i\} = \{0, 1, \dots, n+1\} \notin \mathcal{U}$$

$t_{n+1}$ E $t_n$ COINCIDONO SOLAM. PER GLI INDICI DA 0 A $n+1$

$\mathcal{P}_{cof}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n+1\} \in \mathcal{U}$

DUNQUE HO UNA SEQUENZA INFINITA DISCENDENTE IN $\prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}, \leq) / \mathcal{U}$

$\Rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}, \leq) / \mathcal{U}$ NON È BEN ORDINATO $\lightning$

4) LA CLASSE DEI GRUPPI FINITI NON È ASSIOMATIZZ. AL PRIM'ORDINE

SOL. COME PRIMA, SE LO FOSSE, POTREI CONSIDERARE L'ULTRAPRODOTTO

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i \Big/ \mathcal{U} \qquad \left( C_i \text{ GRUPPO CICLICO DI ORDINE } i, \text{ CON GENERATORE } g_i \right)$$

CON $\mathcal{U}$ ULTRAFILTRO T.C. $\mathcal{P}_{cof}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U}$

COROLL. ŁOŚ

$$\Longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} C_i \Big/ \mathcal{U} \quad \text{GRUPPO FINITO}$$

MA, POSSO DEFINIRE

$$t_1 := [(g_1^1, g_2^1, \ldots g_i^1, \ldots)]$$

$$t_2 := [(g_1^2, g_2^2, \ldots g_i^2, \ldots)]$$

$$\vdots$$

$$t_n := [(g_1^n, g_2^n, \ldots, g_i^n, \ldots)]$$

$$\vdots$$

<u>SE $m \neq k$, ALLORA $t_m \neq t_k$:</u>

INFATTI,

$$\{i \in \mathbb{N} \mid (t_m)_i = (t_k)_i\} =$$

$$= \{i \in \mathbb{N} \mid g_i^m = g_i^k\} =$$

$$= \{i \in \mathbb{N} \mid g_i^{m-k} = e\} =$$

ELEM. NEUTRO

NEL GRUPPO CICLICO $C_i$, $g_i^r = e$ SE E SOLO SE $i \mid r$

$$= \{i \in \mathbb{N} \mid i \mid m-k\} =$$

$$= \mathrm{div}(m-k) \notin \mathcal{U}$$

($\mathrm{div}(m-k)$ È INSIEME FINITO, MENTRE $\mathcal{P}_{cof}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U}$)

DUNQUE $\prod_{i \in \mathbb{N}} C_i \big/ \mathcal{U}$ HA INFINITI ELEMENTI ⚡

---

5) $f$ SIMBOLO DI OPERAZ. BINARIO, $a$ SIMBOLO DI COST., $u$, $x$ VARIABILI

STABILIRE PER QUALI FORMULE $\varphi$, IL TERMINE $f(a,u)$ È SOST. PER $x$ E SCRIVERE

$$\varphi[f(a,u)/x]$$

a) $f(x,x)=a$

$$\varphi[f(a,u)/x]: \boxed{f(f(a,u), f(a,u))=a}$$ SOST.

b) $\exists x(f(x,x)=x)$

$$\varphi[f(a,u)/x]: \boxed{\exists x(f(x,x)=x)}$$ SOST

$$(\exists x\psi)[t/x]: \exists x\psi$$

LA VARIABILE $x$ DA SOST. CON IL TERMINE $t$ È VINCOLATA ESTERNAMENTE → LA SOST. NON HA EFFETTO

c) $P(f(a,u)) \wedge \exists x R(x,u)$

- $P$ SIMBOLO DI PRED. UNARIO
- $R$ SIMBOLO DI PRED. BINARIO

$$\varphi[f(a,u)/x]: \boxed{P(f(a,u)) \wedge \exists x R(x,u)}$$ SOST.

LA $x$ NON COMPARE, QUINDI LA SOST. NON FA NULLA

$$\boxed{(\exists x\psi)[t/x]: \exists x\psi}$$

d) $\exists u (S(x,y,u))$ • $S$ SIMBOLO DI PRED. DI ARIETÀ 3

$$\varphi[f(a,u)/x]: \exists u (S(f(a,u),y,u))$$

NON SOST.: NEL TERMINE $f(a,u)$ C'È LA VARIABILE $u$ CHE DIVENTA VINCOLATA DOPO LA SOSTITUZIONE

e) $\exists u R(y,u)$

$$\varphi[f(a,u)/x]: \boxed{\exists u R(y,u)}$$ SOST.

NON C'È LA VARIABILE $x$

f) $\exists x \exists u (f(x,u) = f(u,x))$

$$\varphi[f(a,u)/x]: \boxed{\exists x \exists u (f(x,u) = f(u,x))}$$ SOST.

$$\boxed{(\exists x \psi)[t/x]: \exists x \psi}$$

ALG. DI BOOLE: RETICOLO, LIMITATO, COMPLEM., DISTR.

RETICOLO: $\exists \wedge, \vee$

LIMITATO: $\exists\, 0, 1$

COMPLEM.: $\forall x, \exists y$: $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$

DISTR.: $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

6) ESEMPI DI

a) POSET NON RETICOLO

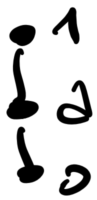
INSIEME PARZIALMENTE ORDINATO


CHI È $a \wedge b$ ?

SAREBBE IL MASSIMO DEI MINORANTI COMUNI, MA $a$ E $b$ NON HANNO MINORANTI IN COMUNE

$\Rightarrow$ NON ESISTE $a \wedge b$

b) RETICOLO LIMITATO, DISTRIBUTIVO, NON COMPL.



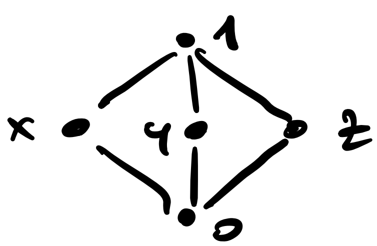

- LIMITATO ✓
- DISTR. ✓ (TUTTI GLI ORDINI LIN. SONO DISTR.)
- $a$ NON HA COMPLEMENTO:
  - $a \wedge a = a \neq 0$ ✗
  - $a \wedge 1 = a \neq 0$ ✗
  - $a \wedge 0 = 0$, MA $a \vee 0 = a \neq 1$ ✗

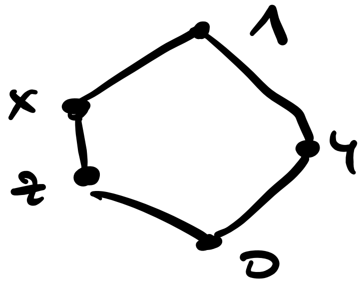
c) RETICOLO DISTRIBUTIVO, NON LIMITATO

$(\mathbb{N}, \leq)$

- DISTR. ✓ (È ORDINE LINEARE)
- NON LIMITATO (NON HA MAX)

d) RETICOLO LIMITATO, COMPLEMENTATO, NON DISTRIBUTIVO




- LIMITATI ✓
- COMPL. ✓
- NON DISTR.

$(x \wedge y) \vee z \neq (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

7) SI ESIBISCANO $A$ ALG. DI BOOLE, $S \subseteq A$ SOTTOINSIEME T.C. VALGANO CONTEMPORANEAM.

a) $0 \notin S$

b) $\forall x, y \in S, \quad x \wedge y \neq 0$

c) $S$ NON HA LA FIP

SOL.

FIP : PRESI UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI, QUESTI HANNO MEET $\neq 0$

LA CONDIZ. C) MI DICE CHE CI SONO

$$x_1, \ldots, x_n \in S \quad \text{t.c.} \quad x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$$

MA...

- $x_i \neq 0 \;\; \forall i$ (PER LA CONDIZIONE a))
- $x_i \wedge x_j \neq 0 \;\; \forall i, j$ (PER LA CONDIZIONE b))

ES. $A = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$

$$S = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

- SONO TUTTI NON VUOTI $\Rightarrow \emptyset \notin S$
- A COPPIE HANNO INTERSEZIONE NON VUOTA $\Rightarrow \forall x, y \in S, \; x \cap y \neq \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{a, c\} \cap \{b, c\} = \emptyset \Rightarrow S$ NON HA LA FIP