LOGICA AL PRIM'ORDINE:

• ALFABETO:

1. un insieme infinito di simboli di variabile:

$$\mathtt{VarX} = \{x, x_1, x_2, x_3, \dots y, y_1, y_2, x_3, z, \dots\};$$

2. i connettivi proposizionali: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot$;
3. i simboli per i quantificatori: $\forall, \exists$;
4. i simboli ausiliari: le parentesi.

Definizione 4.1

Un **linguaggio del primo ordine** è un insieme $\mathcal{L}$ composto da:

5. un insieme (anche vuoto) di **simboli di costante**: $\{c_1, c_2, c_3 \dots\}$;
6. un insieme (anche vuoto) di **simboli di predicato** (detti anche **simboli relazione**): $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ $\cup \{=\}$ ARIETÀ 2
7. un insieme (anche vuoto) di **simboli di funzione**: $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$;
8. una funzione a che assegna a ogni simbolo di predicato e di funzione un numero naturale, detta **arietà** del simbolo.

• TERMINI:

Definizione 4.3

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine, definiamo l'insieme $\mathtt{Term}_{\mathcal{L}}$ dei **termini** nel linguaggio $\mathcal{L}$ come il più piccolo insieme chiuso rispetto alle seguenti regole:

- ogni elemento di $\mathtt{VarX}$ appartiene a $\mathtt{Term}$,
- se c è un simbolo di costante in $\mathcal{L}$ allora $c \in \mathtt{Term}$,
- se f è un simbolo di funzione in $\mathcal{L}$ tale che $a(f) = n$ e $t_1, \dots, t_n \in \mathtt{Term}$, allora anche $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathtt{Term}$.

Scriveremo $t(x_1, ..., x_n)$ per evidenziare il fatto che le variabili individuali in t sono *comprese* tra le variabili $x_1, \dots, x_n$.

- **FORMULE:**

Definizione 4.4

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine, definiamo l'insieme $\texttt{Form}\forall_{\mathcal{L}}$ delle **formule ben formate** (del prim'ordine, nel linguaggio $\mathcal{L}$) come il più piccolo insieme chiuso rispetto alle seguenti regole:

1. se $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \texttt{Term}_{\mathcal{L}}$ e P è un simbolo di predicato in $\mathcal{L}$ tale che $a(P) = n$, allora $P(t_1, \ldots, t_n) \in \texttt{Form}\forall$ (tale formula è detta **formula atomica**).
2. se $\varphi_1, \varphi_2 \in \texttt{Form}\forall$ allora
   a) $(\neg\varphi_1) \in \texttt{Form}\forall$;
   b) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in \texttt{Form}\forall$;
   c) $\exists x(\varphi_1) \in \texttt{Form}\forall$ con $x \in \texttt{VarX}$.

- **VARIABILI LIBERE E VINCOLATE:**

Definizione 4.9

Per ogni termine $t \in \texttt{Term}$ definiamo per ricorsione l'insieme delle sue **variabili libere** $\mathsf{FV}(t)$:

- se $t \in \texttt{VarX}$ allora $\mathsf{FV}(t) = \{t\}$,
- se t è una costante allora $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$,
- se $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ allora $\mathsf{FV}(t) = \mathsf{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{FV}(t_n)$.

Per ogni formula $\varphi \in \texttt{Form}\forall$ definiamo per ricorsione l'insieme delle sue variabili libere $\mathsf{FV}(\varphi)$.

1. se $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$ allora $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{FV}(t_n)$,
2. se $\varphi = (\neg\varphi_1)$ allora $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\varphi_1)$;
3. se $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ allora $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\varphi_1) \cup \mathsf{FV}(\varphi_2)$;
4. se $\varphi = \exists x(\varphi_1)$ allora $\mathsf{FV}(\varphi) = \mathsf{FV}(\varphi_1) \setminus \{x\}$;

Definizione 4.10

Una formula ben formata φ è detta **aperta** se essa contiene almeno una variabile libera ($\mathsf{FV}(\varphi) \neq \emptyset$). In caso contrario essa è detta **enunciato** (o **formula chiusa**). Le variabili che occorrono in φ, ma non appartengono a $\mathsf{FV}(\varphi)$ si dicono **vincolate**.

• SEMANTICA:

Definizione 4.18

Dato un linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L}$, una **struttura** del prim'ordine $\mathfrak{A}$ per $\mathcal{L}$ è data da un insieme non vuoto A, detto **dominio** (o **supporto** della struttura) e da un assegnamento che associa:

1. a ogni simbolo di costante c in $\mathcal{L}$ un elemento $c^{\mathfrak{A}} \in A$;
2. a ogni simbolo di predicato Q in $\mathcal{L}$, tale che $a(Q) = n$, una relazione n-aria $Q^{\mathfrak{A}} : A^n \to \{0, 1\}$ o in altre parole, un sottoinsieme $Q^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$. $\left(=^{\mathfrak{A}} := \{(a,a) \mid a \in A\} \right)$
3. a ogni simbolo di funzione f in $\mathcal{L}$, tale che $a(f) = m$, una funzione m-aria $f^{\mathfrak{A}} : A^m \to A$.

Definizione 4.19

Data una struttura $\mathfrak{A}$ con dominio A, chiameremo **interpretazione** in $\mathfrak{A}$ una qualunque funzione $v : \mathtt{VarX} \to A$.

ESTENSIONE AI TERMINI:

Definizione 4.20

Data un'interpretazione v definiamo $\tilde{v}$ come l'estensione di v a tutto l'insieme dei termini Term come segue: se t è un qualsiasi termine allora

1. se $t = x$ per qualche variabile x, si ha $\tilde{v}(t) = v(x)$;
2. se $t = c$ per qualche costante c, si ha $\tilde{v}(t) = c^{\mathfrak{A}}$;
3. se $t = f(t_1, \dots, t_n)$, si ha $\tilde{v}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\tilde{v}(t_1), \dots, \tilde{v}(t_n))$.

È immediato verificare che una tale estensione è unica.

VERITÀ DELLE FORMULE

Definizione 4.21

[**Semantica del prim'ordine**] Sia φ una formula nel linguaggio $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ e v un'interpretazione in $\mathfrak{A}$. La relazione $\mathfrak{A}, v \models \varphi$ è definita ricorsivamente come segue:

1. $\mathfrak{A}, v \models P(t_1, \dots, t_n)$ vale se, e soltanto se, $P^A(v(t_1), \dots, v(t_n))$ è vera in $\mathfrak{A}$;
2. $\mathfrak{A}, v \models (\neg\varphi)$ se, e soltanto se, $\mathfrak{A}, v \not\models \varphi$ (cioè non vale che $\mathfrak{A}, v \models \varphi$);
3. $\mathfrak{A}, v \models (\varphi \land \psi)$ se, e soltanto se, $\mathfrak{A}, v \models \varphi$ e $\mathfrak{A}, v \models \psi$;

$v[a/x] : \mathrm{Var} \to A$
$x \neq y \mapsto v(y)$
$x \mapsto a$

4. $\mathfrak{A}, v \models (\exists x \varphi)$ se, e soltanto se, esiste un a in A tale che $\mathfrak{A}, v[a/x] \models \varphi$.

Se $\mathfrak{A}, v \models \varphi$, diremo che la formula φ è **valida sotto l'interpretazione v** in $\mathfrak{A}$. Diremo semplicemente che la formula φ è **valida** in $\mathfrak{A}$ se per ogni interpretazione v in A si ha $\mathfrak{A}, v \models \varphi$. In questo caso scriveremo $\mathfrak{A} \models \varphi$ e diremo che $\mathfrak{A}$ è un **modello** di φ.

Definizione 4.28

Sian $\varphi \in \texttt{Form}\forall$ e $\Gamma \subseteq \texttt{Form}\forall$.

1. La formula φ è **logicamente valida** se essa è vera in ogni struttura. In altre parole se per ogni $\mathfrak{A}$ e per ogni interpretazione v in A si ha $\mathfrak{A}, v \models \varphi$. In tal caso scriveremo $\models \varphi$.
2. La formula φ è **soddisfacibile** se esistono una struttura $\mathfrak{A}$ ed un'interpretazione v tale che $\mathfrak{A}, v \models \varphi$.
3. L'insieme Γ è logicamente valido se tutte le formule in Γ sono logicamente valide. In tal caso scriveremo $\models \Gamma$.
4. L'insieme Γ è soddisfacibile se esiste una struttura $\mathfrak{A}$ e una valutazione v in $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{A}, v \models \gamma$ per tutte le formule $\gamma \in \Gamma$.
5. La formula φ è **conseguenza logica** di Γ, se per ogni struttura $\mathfrak{A}$ ed ogni interpretazione v per i quali si abbia $\mathfrak{A}, v \models \gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, risulta anche $\mathfrak{A}, v \models \varphi$. In tal caso scriveremo $\Gamma \models \varphi$,
6. Le formule φ e ψ sono **logicamente equivalenti** se si ha che $\{\varphi\} \models \psi$ e $\{\psi\} \models \varphi$, in tal caso scriveremo $\varphi \equiv \psi$. È facile vedere che $\varphi \equiv \psi$ se, e solo se, $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

1) LINGUAGGIO ORDINI PARZIALI

SIMBOLO DI PREDICATO R DI ARIETÀ 2

$$\forall x (R(x,x))$$

$$\forall x \forall y (R(x,y) \land R(y,x) \to x=y)$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$$

FORMULE CHE ESPRIMANO

a) x È MASSIMO

$$\forall y (y R x)$$

b) x È MASSIMALE

$$\forall y (x R y \to x=y)$$

c) x È STRETTAM. MINORE DI y

$$(x R y) \land \neg (x=y)$$

d) z È L'INF. DI x E y

$$(z R x) \land (z R y) \land \forall t ((t R x) \land (t R y) \to (t R z))$$

2) PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ENUNCIATO AL PRIM'ORDINE CHE ESPRIMA "ESISTONO ALMENO n ELEMENTI"

$$\mu_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j) \right)$$

3) PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ENUNCIATO AL PRIM'ORDINE CHE ESPRIMA "ESISTONO AL PIÙ n ELEMENTI"

$$M_n := \neg \mu_{n+1}$$

4) PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ENUNCIATO AL PRIM'ORDINE CHE ESPRIMA "ESISTONO ESATTAMENTE n ELEMENTI"

$$M_n \wedge \mu_n$$

5) ASSIOMATIZZ. AL PRIM'ORDINE PER

a) GRUPPI PRIVI DI TORSIONE

$$\mathcal{L} = \begin{cases} e & \text{SIMBOLO DI COST.} \\ I & \text{SIMBOLI DI FUNZIONE} \quad \text{ARIETÀ } 1 \\ \cdot & \qquad\qquad\qquad\quad \text{ARIETÀ } 2 \end{cases}$$

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\ \forall x ((e \cdot x = x) \wedge (x \cdot e = x)) \\ \forall x ((x \cdot I(x) = e) \wedge (I(x) \cdot x = e)) \end{array}\right\} \text{ASSIOMI DI GRUPPO} \\ \{ TF_n := \forall x ((\underbrace{x \cdot (x \cdot (\ldots (x \cdot x) \ldots))}_{n\text{-volte}} = e) \rightarrow x = e) \}_{n \in \mathbb{N}} \end{array} \right.$$

---

b) GRAFI DIRETTI ACICLICI

$\mathcal{L} = R$ SIMBOLO DI RELAZ. DI ARIETÀ 2

$$CF_n := \forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i R x_{i+1} \right) \rightarrow \neg (x_n R x_1) \right)$$

$$\Gamma = \{ CF_n \}_{n \in \mathbb{N}}$$

6)

$$\Gamma := \begin{cases} \forall x \exists y (R(x,y)) \\ \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) \end{cases} \longrightarrow \left(\vdash \forall x (\neg R(x,x)) \right)$$

TROVARE UN MODELLO

MINORE STRETTO

$$(\mathbb{N}, <)$$

7) LINGUAGGIO CON SIMBOLO DI COSTANTE 0 E SIMBOLO DI FUNZIONE UNARIO s.

a) SI TROVI INSIEME FINITO DI FORMULE Γ AL PRIM'ORDINE IN TALE LINGUAGGIO CHE ABBIA UN MODELLO INFINITO, MA CHE NON ABBIA MODELLI FINITI

$$\Gamma := \begin{cases} \forall x \forall y ((s(x)=s(y)) \to (x=y)) & \text{"} s \text{ è iniettiva"} \\ \forall x (\neg (s(x)=0)) & \text{"} 0 \notin \mathrm{Im}\, s \text{", dunque "} s \text{ non è suriettiva"} \end{cases}$$

$$\Gamma \models (\mathbb{N}, \underset{\text{zero}}{0}, \underset{\text{funzione successore}}{s})$$

SE Γ AVESSE MODELLO FINITO, DICIAMO CON DOM. X, ESISTEREBBE UNA FUNZIONE $X \to X$ INJ. NON SURJ. ↯

---

b) ESISTE UN INSIEME DI FORMULE AL PRIM'ORDINE IN TALE LINGUAGGIO CHE ABBIA COME UNICO MODELLO (A MENO DI ISO) $(\mathbb{N}, 0, s)$?

NO, PER LÖWENHEIM SKOLEM

SE P.A. $\exists\, \Gamma$ COME IN b), ALLORA Γ AVREBBE UN MODELLO DI OGNI CARDINALITÀ INFINITA (AMMETTE UN MOD. DI CARD. INFINITO NUMERABILE E IL SUO LINGUAGGIO È AL PIÙ NUMERABILE)

8) $\mathcal{L}$ LINGUAGGIO AL PRIM'ORDINE CON P SIMBOLO DI PREDICATO UNARIO E M SIMBOLO DI PREDICATO BINARIO.

$\mathcal{A}_0$ $\mathcal{L}$-STRUTTURA CON INSIEME SOGGIACENTE $A_0 = \{3, 5\}$

T.C.

$$P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset \subseteq A_0^1$$

$$M^{\mathcal{A}_0} = \{(3,3), (3,5), (5,5)\} \subseteq A_0^2$$

SIANO a, b VARIABILI E ν_0 VALUTAZIONE T.C.

$$\nu_0(a) = 3, \ \nu_0(b) = 5$$

PER CIASCUNA FORMULA φ TRA LE SEGUENTI, STABILIRE SE

(i) $\mathcal{A}_0, \nu_0 \models \varphi$

(ii) $\mathcal{A}_0 \models \varphi$ $(\forall \nu,\ \mathcal{A}_0, \nu \models \varphi)$

(iii) $\models \varphi$ $(\forall \mathcal{A},\ \mathcal{A} \models \varphi,$ CIOÈ $\forall \mathcal{A}, \forall \nu,\ \mathcal{A}, \nu \models \varphi)$

(iv) φ È SODDISFACIBILE $(\exists \mathcal{A}, \nu$ T.C. $\mathcal{A}, \nu \models \varphi)$

---

a) $\forall x M(a, x)$

(i) $\mathcal{A}_0, \nu_0 \models \forall x M(a, x)$

SSE PER OGNI $u \in A_0 = \{3, 5\}$ $\mathcal{A}_0, \nu_0[u/x] \models M(a, x)$

SSE PER OGNI $u \in \{3, 5\}$ $(\nu_0[u/x](a), \nu_0[u/x](x)) \in M^{\mathcal{A}_0}$

SSE PER OGNI $u \in \{3, 5\}$ $(3, u) \in M^{\mathcal{A}_0}$ ✓ $\Rightarrow$ (iv) ✓

(ii) ✗ (ES. $\nu(a) = 5$) $\Rightarrow$ (iii) ✗

---

b) $\forall x M(b, x)$

(i) $\mathcal{A}_0, \nu_0 \models \forall x M(b, x)$

SSE PER OGNI $u \in \{3, 5\}$, $(5, u) \in M^{\mathcal{A}_0}$ ✗ $\Rightarrow$ (ii) ✗

$\Rightarrow$ (iii) ✗ . (iv) ✓ (BASTA PRENDERE $\nu(b) = 3$)

c) $\neg P(a)$

(i) $\mathcal{A}_0, v_0 \models \neg P(a)$ SSE $\mathcal{A}_0, v_0 \not\models P(a)$ SSE

SSE $3 = v_0(a) \notin P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset$ ✓ $\Rightarrow$ (iv) ✓

(ii) $\mathcal{A}_0 \models \neg P(a)$ SSE PER OGNI v, $v(a) \in P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset$ ✓

(iii) ✗ : BASTA SCEGLIERE $\mathcal{A}$ T.C. $P^{\mathcal{A}} = A_0$

---

d) $\exists x\, M(a,x)$

(i) SSE ESISTE $n \in A_0$ T.C. $(3, n) \in M^{\mathcal{A}_0}$ ✓

$\Rightarrow$ (iv) ✓

(ii) SSE PER OGNI v ESISTE $n \in A_0$ T.C. $(v(a), n) \in M^{\mathcal{A}_0}$ ✓

(iii) ✗ (BASTA CHE $M^{\mathcal{A}} = \emptyset$)

e) $\exists x \forall y\, M(x,y)$

(i) SSE ESISTE $n \in A_0$ T.C. PER OGNI $m \in A_0$, $(n,m) \in M^{\mathcal{A}_0}$

✓ $(n = 3)$ $\Rightarrow$ (iv) ✓

(ii) ✓ (LA FORMULA È CHIUSA, QUINDI LA SUA VERITÀ NON DIPENDE DA v)

(iii) ✗ (BASTA CHE $M^{\mathcal{A}} = \emptyset$)

f) $\neg(M(a,b) \leftrightarrow M(b,a))$

(i) ✓ ($(3,5) \in M^{\mathcal{A}_0}$, $(5,3) \notin M^{\mathcal{A}_0}$) $\Rightarrow$ (iv) ✓

(ii) ✗ BASTA $v(a) = v(b)$ $\Rightarrow$ (iii) ✗

g) $\forall x (P(x) \to \neg P(x))$

(i) SSE PER OGNI $n \in A_0$, $n \notin P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset$ OPPURE $n \notin P^{\mathcal{A}_0} = \emptyset$ ✓

$\Rightarrow$ (ii) ✓ (LA FORMULA È CHIUSA)

$\Rightarrow$ (iv) ✓

(iii) ✗ BASTA CHE $P^{\mathcal{A}} = A_0 \neq \emptyset$

h) $\forall x \forall y (M(x,y) \to \neg M(y,x))$

(i) ✗ (SE PER $x=3$, $y=3$) $\Rightarrow$ (ii) ✗ $\Rightarrow$ (iii) ✗

(iv) ✓ (BASTA CHE $M^{\mathcal{A}} = \emptyset$)

9) INSIEME NON SODDISFACIBILE DI ENUNCIATI SODDISFACIBILI

SOL

$$\{\forall x P(x), \neg\forall x P(x)\}$$

$A = \{*\}$ $\quad$ $A = \{*\}$

$P^a = A$ $\quad$ $P^a = \phi$

FORMA NORMALE PRENESSA:

$$\varphi = \square_1 x_1 \dots \square_n x_n \varphi' \quad , \text{ con } \square_i \in \{\forall, \exists\},\ n \in \mathbb{N},$$
φ' PRIVA DI QUANTIFICATORI

10) RISCRIVERE LE SEGUENTI FORMULE IN FORMA NORMALE PRENESSA

$\equiv \forall z \neg$

a) $$\left(\neg \exists z\, Q(x,y,z)\right) \vee \left(\forall \cancel{z}^{\,u} \exists w\, P(x,y,\cancel{z}^{\,u},w)\right)$$

$$\forall z \left(\neg(Q(x,y,z)) \vee \forall u \exists w\, P(x,y,u,w)\right)$$

$$\forall z \forall u \left(\neg(Q(x,y,z)) \vee \exists w\, P(x,y,u,w)\right)$$

$$\forall z \forall u \exists w \left(\neg(Q(x,y,z)) \vee P(x,y,u,w)\right)$$

---

b) $$(\forall x\, P(x)) \to Q(y)$$

$\equiv \exists x \neg$

$$\neg \forall x\, P(x) \vee Q(y)$$

$$\exists x \left(\neg P(x) \vee Q(y)\right)$$

c) $\exists x(P(x) \wedge \exists \cancel{x}^{y} Q(\cancel{x}^{y}))$

$\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$