ALGEBRE DI BOOLE

$\forall x, y \ \exists \begin{cases} x \wedge y := \inf(x,y) \\ x \vee y := \sup(x,y) \end{cases}$

$\forall x \ \exists y$ T.C. $\begin{cases} x \wedge y = 0 \\ x \vee y = 1 \end{cases}$

$\exists \begin{cases} 1 := \max \\ 0 := \min \end{cases}$

$\forall x, y, z$ $\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases}$

Definizione 3.30

Un'**algebra di Boole** è un reticolo complementato, limitato e distributivo. Alternativamente, possiamo definire un'algebra di Boole come una struttura del tipo $\langle A, \wedge^2, \vee^2, \neg^1, 0, 1\rangle$, che soddisfi i seguenti assiomi:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad \text{e} \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \tag{BA1}$$
$$x \vee y = y \vee x \quad \text{e} \quad x \wedge y = y \wedge x, \tag{BA2}$$
$$(x \wedge y) \vee y = y \quad \text{e} \quad (x \vee y) \wedge y = y, \tag{BA3}$$
$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad \text{e} \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z), \tag{BA4}$$
$$x \wedge \neg x = 0 \quad \text{e} \quad x \vee \neg x = 1 \tag{BA5}$$

Si noti, che sebbene nessuna delle equazioni qui sopra dica esplicitamente che 0 e 1 sono rispettivamente il minimo e il massimo dell'algebra, come vedremo nella Proposizione 3.33, ciò è una conseguenza di questi assiomi.

OMOMORFISMI: $f: A \to B$ T.C. $\forall a_1, a_2 \in A$,

$$f(a_1 \wedge a_2) = f(a_1) \wedge f(a_2)$$
$$f(a_1 \vee a_2) = f(a_1) \vee f(a_2)$$
$$f(\neg a_1) = \neg f(a_1)$$
$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{CONSEGUENZE DELLE PRIME TRE}$$

- EPI = SURJ.
- MONO = INJ.
- ISO = BIJ.

CONGRUENZE: $\equiv \subseteq A \times A$ T.C.

- $\equiv$ RELAZIONE DI EQ. (RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA)
- $\forall a_1, a_2, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in A$ T.C. $a_1 \equiv \bar{a}_1$ E $a_2 \equiv \bar{a}_2$

$$a_1 \wedge a_2 \equiv \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2$$
$$a_1 \vee a_2 \equiv \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2$$
$$\neg a_1 \equiv \neg \bar{a}_1$$

FILTRI: $F \subseteq A$ t.c.

- $1 \in F$
- $a_1, a_2 \in F \Rightarrow a_1 \wedge a_2 \in F$
- $a_1 \in F,\ a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_2 \in F$

IDEALI: $I \subseteq A$ t.c.

- $0 \in I$
- $a_1, a_2 \in I \Rightarrow a_1 \vee a_2 \in I$
- $a_2 \in I,\ a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_1 \in I$

ORA, DATA A ALGEBRA DI BOOLE

$$Q(A) := \frac{\{f: A \to B \text{ EPI} \mid B \text{ ALG. DI BOOLE}\}}{\left(f: A \to B \cong f': A \to B' \text{ SSE } \exists \text{ ISO } h: B \to B' \text{ T.C. } h \circ f = f'\right)}$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}\pi_{\equiv}: A \to A/_{\equiv} \\ \quad a \mapsto [a]\end{array}\right]} \qquad \boxed{[f: A \to B]}$$

1:1

$$\boxed{\equiv} \qquad \boxed{a_1 \equiv_f a_2 \text{ SSE } f(a_1) = f(a_2)}$$

$$Con(A) := \{\text{CONGRUENZE SU } A\}$$

$$\boxed{\equiv} \qquad \boxed{a_1 \equiv_F a_2 \text{ SSE } \begin{cases} \neg a_1 \vee a_2 \in F \\ \neg a_2 \vee a_1 \in F \end{cases}}$$

1:1

$$\boxed{[1]_{\equiv}} \qquad \boxed{F}$$

$$\mathcal{F}(A) := \{\text{FILTRI DI } A\}$$

$$\begin{tikzcd}
\neg I := \{\neg a \mid a \in I\} \arrow[dd, leftarrow, mapsto'] \arrow[rr, phantom, "\overset{1:1}{\updownarrow}"] & & F \arrow[dd, mapsto] \\
& & \\
I & & \neg F := \{\neg a \mid a \in F\}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}(A) := \{$IDEALI DI $A\}$

SOTTOALGEBRE

A ALG. DI BOOLE, $S \subseteq A$ SOTTOINS.

t.c.

- $0 \in S$
- $1 \in S$
- $a_1, a_2 \in S \Rightarrow a_1 \wedge a_2,\ a_1 \vee a_2,\ \neg a_1 \in S$

ES. $f: A \to B$ OMOMORFISMO $\Rightarrow f(A) \subseteq B$ SOTTOALGEBRA

ULTRAFILTRI: $F \subseteq A$ FILTRO PROPRIO ($F \neq A$, N.B. $0 \notin F$) SI DICE ULTRAFILTRO SE È MASSIMALE TRA GLI ULTRAFILTRI PROPRI

TEOREMA DELL'ULTRAFILTRO: $F \subseteq A$ FILTRO PROPRIO $\Rightarrow \exists$ ULTRAFILTRO $F' \subseteq A$ t.c. $F \subseteq F'$

TEOREMA DI STONE:

A ALG. DI BOOLE $\Rightarrow \exists\, X$ INSIEME t.c. A È ISO AD UNA SOTTOALGEBRA DI $\mathcal{P}(X)$

dim $X := \mathcal{U}(A) = \{$ULTRAFILTRI DI $A\}$

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ a &\longmapsto \{F \in \mathcal{U}(A) \mid a \in F\} \end{aligned}$$

È MONOMORFISMO

$\square$

ESERCIZI:

1)

a) ALG. DI BOOLE DI CARDINALITÀ 16

b) ALG. DI BOOLE DI CARDINALITÀ DEL CONTINUO

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A$ ALG. DI BOOLE T.C. $|A| = n$?

d) $\forall \kappa$ CARD. INFINITO $\exists A$ ALG. DI BOOLE T.C. $|A| = \kappa$?

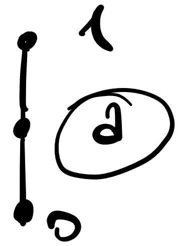
a) $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

$X = \{a, b, c, d\}$

b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

c)

A



y t.c.

$a \wedge y = 0 \Rightarrow y = 0$

$a \vee y = 1$

d)

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\cup\!\mid$$

$$\mathcal{P}_{\substack{fin\\cof}}(\mathbb{N}) = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ FINITO O } X^c \text{ FINITO}\}$$

$$\underbrace{\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})} \cup \mathcal{P}_{cof}(\mathbb{N})$$

$$\mathcal{P}_{fin}(\cancel{\mathbb{N}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\cancel{\mathbb{N}})$$

X INFINITO

$\mathcal{P}_{fin}(X)$
cof

- $|Free(X)| = |X|$

$$\| \quad \wedge \quad \vee \quad \neg$$

$$\underline{Form(X)}_{\sim}$$

$\varphi \sim \psi$ sse

$\forall v \quad v(\varphi) = v(\psi)$

$$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$

$0 = [a \wedge \neg a]$

$1 = [a \vee \neg a]$

$\neg[\varphi] = [\neg\varphi]$

2) X insieme, $Y \subseteq X$.

a) $\pi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$
$A \longmapsto A \cap Y$

è epimorfismo

b) $i : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$A \longmapsto A$

è omomorfismo?

a)

A, A'

$$\pi(A \cap A') = (A \cap A') \cap Y = \underbrace{(A \cap Y) \cap (A' \cap Y)}_{\pi(A) \cap \pi(A')}$$

$$\pi(A \cup A') = (A \cup A') \cap Y = \underbrace{(A \cap Y) \cup (A' \cap Y)}_{\pi(A) \cup \pi(A')}$$

$$\pi({}^cA) = ({}^cA) \cap Y = {}^c(A \cap Y) = {}^c\pi(A)$$

$$\pi(\emptyset) = \emptyset \cap Y = \emptyset$$
$$\pi(X) = X \cap Y = Y$$

b) $i(Y \setminus A) = Y \setminus A$

$i(Y)$

3) X INSIEME, $x_0 \in X$. DEFINIAMO LA SEGUENTE RELAZ. SU $\mathcal{P}(X)$: $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A \sim B \quad \text{SSE} \quad \begin{matrix} (x_0 \in A \text{ E } x_0 \in B) \\ \text{OPPURE} \\ (x_0 \notin A \text{ E } x_0 \notin B) \end{matrix}$$

a) CONGRUENZA?

b) QUANTE CLASSI DI EQUIV.?

c) FILTRO F ASSOCIATO?

d) ESIBIRE UN BAL $f: \mathcal{P}(X) \longrightarrow A$ T.C. $\ker f = F$

a)

- <u>RIFL.</u> $A \sim A$
- <u>SIMM.</u> $A \sim B$
- <u>TRANS.</u> $A \sim B$, $B \sim C$

$x_0 \in A$, $x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in C$

$\Rightarrow A \sim C$

$x_0 \notin A$, $x_0 \notin B \Rightarrow x_0 \notin C$

$\Rightarrow A \sim C$

$$A_1 \sim B_1, \quad A_2 \sim B_2$$

- $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2$

$x_0 \in A_1$, $x_0 \in B_1$

$x_0 \in A_2$, $x_0 \in B_2 \Rightarrow x_0 \in A_1 \cap A_2$
$\in B_1 \cap B_2$

$x_0 \notin A_2$, $x_0 \notin B_2 \Rightarrow x_0 \notin A_1 \cap A_2$
$\notin B_1 \cap B_2$

$x_0 \notin A_1$, $x_0 \notin B_1$
$x_0 \notin A_1 \cap A_2$
$\notin B_1 \cap B_2$

- $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$

$x_0 \in A_1$, $x_0 \in B_1 \Rightarrow x_0 \in A_1 \cup A_2$
$\in B_1 \cup B_2$

- $X \setminus A_1 \sim X \setminus B_1$

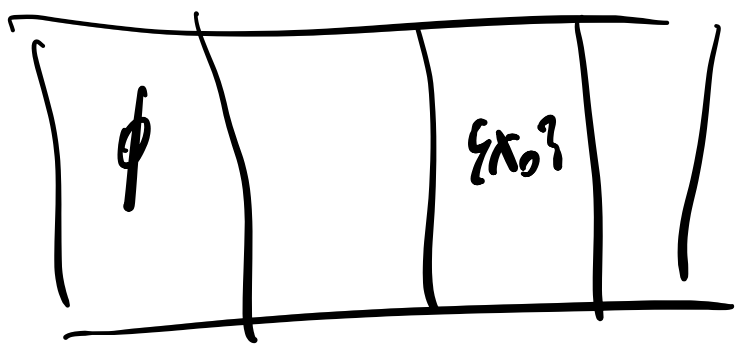
b)

$$[\emptyset] \qquad \begin{array}{c} X \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\{x_0\}] \end{array} \qquad \sim \mathcal{P}(X)$$

- $\underline{\emptyset \not\sim \{x_0\}}$

$$A \subseteq X \quad \begin{cases} x_0 \notin A & \emptyset \sim A \\ x_0 \in A & \{x_0\} \sim A \end{cases}$$

$$A \in \mathcal{P}(X)$$



c) $F = [X] = [\{x_0\}] =$

$= \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\}$

d) $\pi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)/\sim \; \cong \{0,1\}$ ALG. DI BOOLE

$$A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin A \\ 1 & \text{se } x_0 \in A \end{cases}$$

$\ker \pi = F$

4) X INSIEME

a) $\mathcal{P}_{cof}(X) := \{Y \subseteq X \mid X \setminus Y \text{ FINITO}\}$ FILTRO DI $\mathcal{P}(X)$?

b) QUANDO È FILTRO PROPRIO?

a) • $X \in \mathcal{P}_{cof}(X)$ $\quad X \setminus X = \emptyset$ ✓

• $A, B \in \mathcal{P}_{cof}(X)$ $\quad X \setminus (A \cap B) =$

$$\underbrace{(X \setminus A)}_{\text{FINITO}} \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\text{FINITO}}$$

$A \cap B \in \mathcal{P}_{cof}(X)$

• $A \subseteq B$, $A \in \mathcal{P}_{cof}(X)$ $\quad (X \setminus B) \subseteq \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{FINITO}}$

$\Rightarrow B \in \mathcal{P}_{cof}(X)$

b) $\mathcal{P}_{cof}(X) \neq \mathcal{P}(X)$

$$\emptyset \notin \mathcal{P}_{cof}(X)$$

$$\Updownarrow$$

$X = X \setminus \emptyset$ INFINITO

5) $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$

$\mathcal{A} := \{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ FILTRO SU $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

<u>Sol.</u>

- $\mathbb{N} = I_0$
- $I_n \cap I_m = I_{\max(n,m)}$
- $I_n \subseteq A^{\in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$

$$I_2 \subseteq I_2 \cup \{0\}$$

6) SE A FINITA, OGNI FILTRO DI A È PRINCIPALE

- $a\uparrow = \{b \in A \mid a \leq b\}$

- $a \leq b_1$, $a \leq b_2$ $a \leq b_1 \wedge b_2$

- $a \leq b_1$ $b_1 \leq b_2$ $\Rightarrow$ $a \leq b_2$

Sol $F \subseteq A$ FILTRO

$F = a\uparrow$ PER UN CERTO $a \in A$

$a := \min F$

$F = \{a_1, \longrightarrow a_n\}$ $a = ((a_1 \wedge \ldots) \ldots) \wedge a_n$

7) A ALG. DI BOOLE FINITA $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ T.C. $|A| = 2^n$

SOL.

TEOREMA DI STONE:

A ALG. DI BOOLE $\Rightarrow \exists\, X$ INSIEME T.C. A È ISO AD UNA SOTTOALGEBRA DI $\mathcal{P}(X)$

dim $X := \mathcal{U}(A) = \{$ULTRAFILTRI DI $A\}$

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{P}(X) \\ a &\longmapsto \{F \in \mathcal{U}(A) \mid a \in F\} \end{aligned}$$

È MONOMORFISMO

$$b \dashrightarrow \{b\uparrow\}$$
$$\qquad \shortparallel$$
$$\longmapsto \{F \in \mathcal{U}(A) \mid b \in F\}$$

$$b \in F \Rightarrow b\uparrow \subseteq F$$

$$\Rightarrow$$

$$a_1 \vee \dots \vee a_n \dashrightarrow \{\overset{F_1}{a_1\uparrow}, \dots \overset{F_n}{a_n\uparrow}\} = \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\overset{\mathcal{U}(A)}{\overset{\shortparallel}{X}})$$

$$\varphi(a_1 \vee \dots \vee a_n) = \underbrace{\varphi(a_1)}_{\{a_1\uparrow\}} \cup \dots \cup \underbrace{\varphi(a_n)}_{\{a_n\uparrow\}}$$

8) X FINITO.

a) $|\mathcal{F}(\mathcal{P}(X))| = ?$

b) $|Con(\mathcal{P}(X))| = ?$

c) $|\mathcal{U}(\mathcal{P}(X))| = ?$

SOL.

a) $a\uparrow \overset{=}{\neq} b\uparrow$

$a \leq b \qquad b \leq a$

$$|\mathcal{F}(\mathcal{P}(X))| = |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

b)

$$|Con(\mathcal{P}(X))| = |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

c) $|\mathcal{U}(\mathcal{P}(X))| =$

$$F \subseteq \overset{\text{FINITA}}{\mathcal{P}(X)} \quad \text{FILTRO}$$

$$\overset{\shortparallel}{A\uparrow} = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$$

• Se $A = \{x_0\}$

$$A\uparrow = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid \{x_0\} \subseteq B\} =$$
$$= \{B \in \mathcal{P}(X) \mid x_0 \in B\} \neq \emptyset$$

Se $\underset{\ni \emptyset}{A\uparrow} \subsetneq F \Rightarrow \exists\, B' \in F$ t.c. $x_0 \notin B'$

$$\underset{\in F}{\{x_0\}} \cap \underset{\in F}{B'} = \emptyset \qquad F = \mathcal{P}(X)$$

• $x_0 \neq x_1 \in A$

$$A\uparrow = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$$

$$\underset{\{x_0\}}{\overset{\Psi}{\{x_0\}\uparrow}} \supsetneq \overset{\not\ni}{A\uparrow}$$

$$|\mathcal{U}(\mathcal{P}(X))| = |X|$$