**ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA**
**23/01/2018**

| |
|---|
| Nome: ____________________ |
| Cognome: ____________________ |
| Matricola: ____________________ |

# ISTRUZIONI,
## leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.

(4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

**Esercizio 1** (4 punti)**.** Il signor Rossi ha dimenticato il codice segreto della sua tessera bancomat. Ricorda che comincia per 1, che le altre quattro cifre sono 2,5,6,9 (ma non in che ordine). Quanti sono i possibili codici che soddisfano queste proprietà? In seguito il sig. Rossi ricorda che la cifra centrale è dispari. Quanti sono i possibili codici che soddisfano le prime proprietà più quest'ultima?

**Motivare le risposte**.

*Soluzione:* Il numero di possibili codici che cominciano per 1 e in cui le altre quattro cifre sono 2,5,6,9 è 4!=24. Per sapere quanti sono quelli la cui cifra centrale è dispari ragioniamo così: la cifra centrale potrebbe essere 5 e le possibili disposizioni delle rimanenti cifre (2,6,9) sarebbero 3!=6. Oppure la cifra centrale potrebbe essere 9 e le possibili disposizioni delle rimanenti cifre (2,5,6) sarebbero ancora 3!=6. Quindi le possibilità totali sono 6+6=12.

**Esercizio 2** (6 punti)**.** Data le seguente funzione.

$$f(x) = \frac{x + \log(1 - 4e^x)}{x^2 + 5x + 6}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

  Dom($f$)=________________________________________

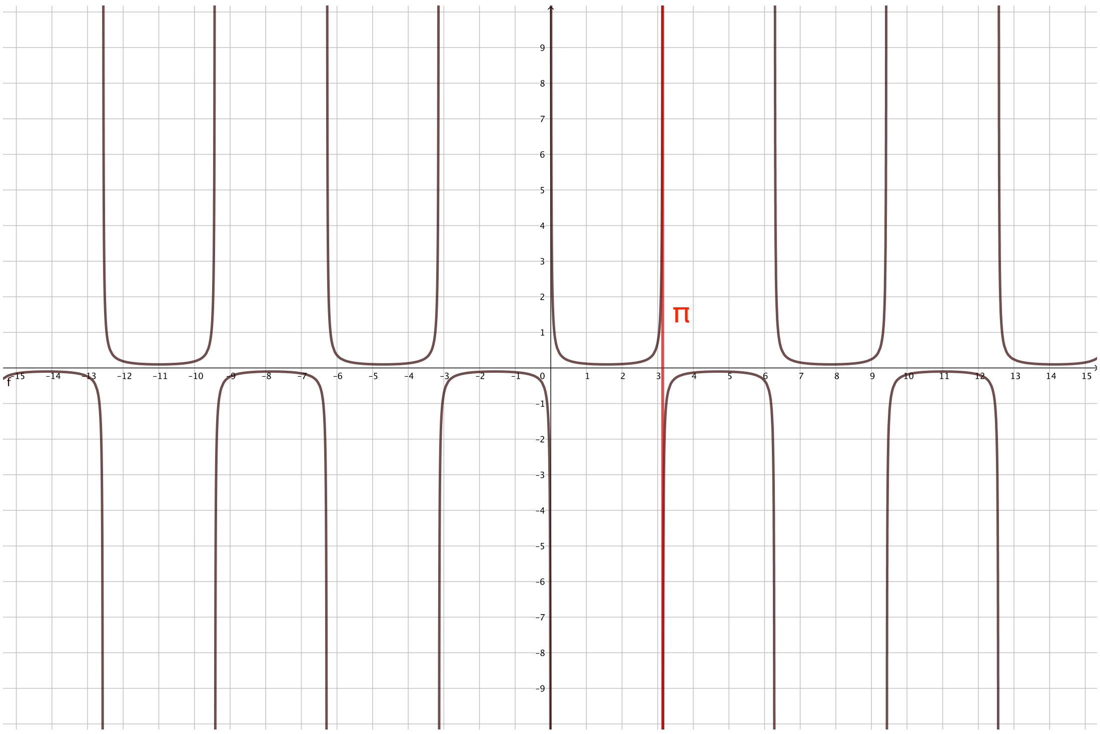
- Calcolare la derivata di $f(x)$.

  $f'(x)$=________________________________________

*Soluzione:*

$$\begin{cases} 1 - 4e^x > 0 \\ x^2 + 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x < \frac{1}{4} \\ (x+3)(x+2) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \log \frac{1}{4} \\ x \neq -2x \neq -3 \end{cases}$$

**Esercizio 3** (4 punti)**.** Sia $f$ la funzione descritta dal grafico qui sotto:

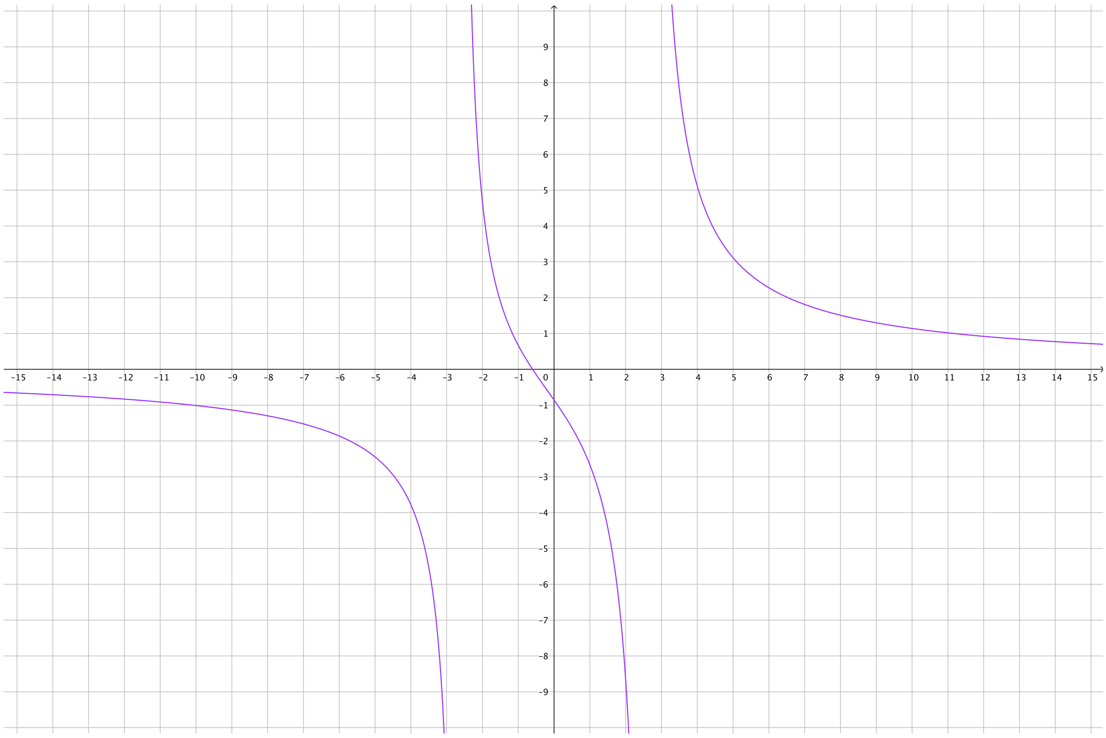



Indicare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to 0+} f(x) =$ ____________________
- $\lim_{x \to \pi} f(x) =$ ____________________
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ____________________

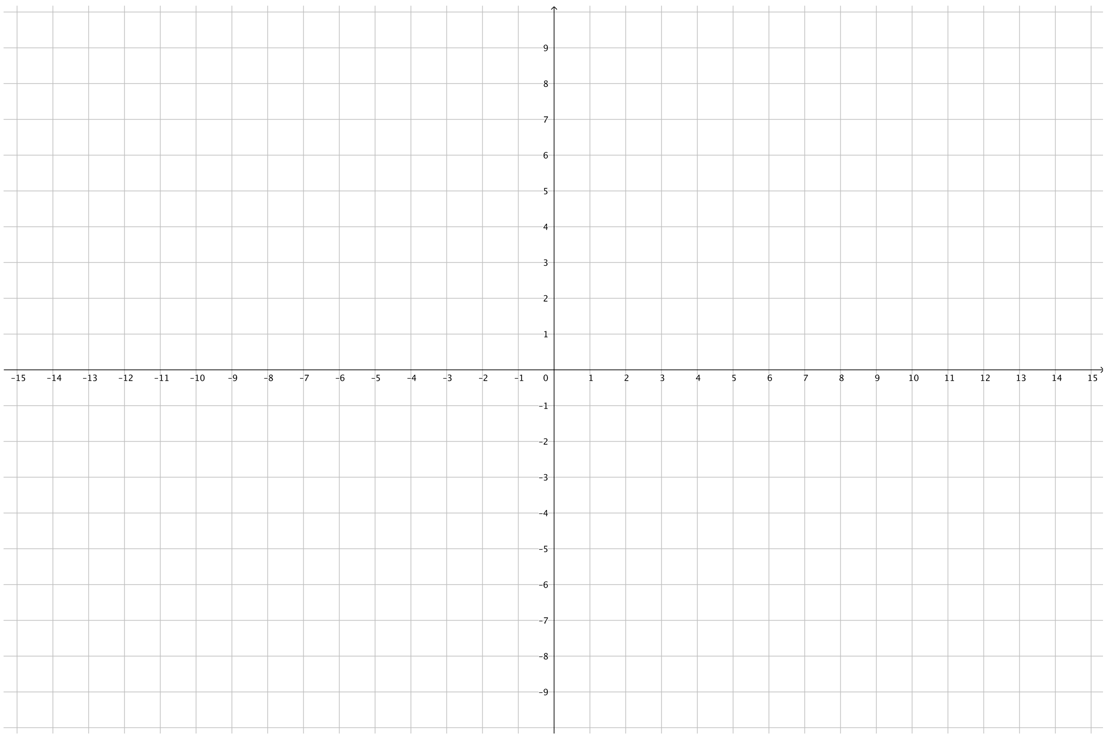
*Soluzione:* $+\infty$. Non esiste. Non esiste.

**Esercizio 4** (4 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

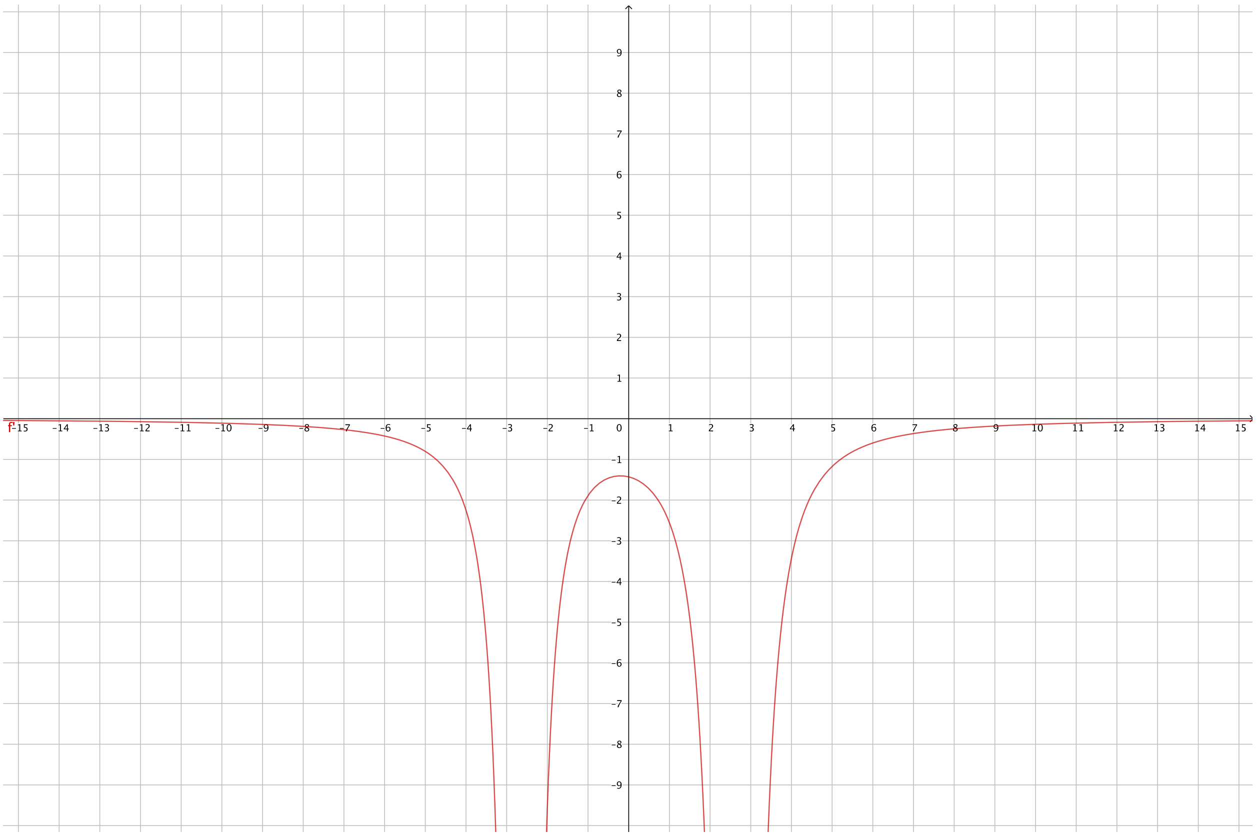


.

Disegnarne la derivata

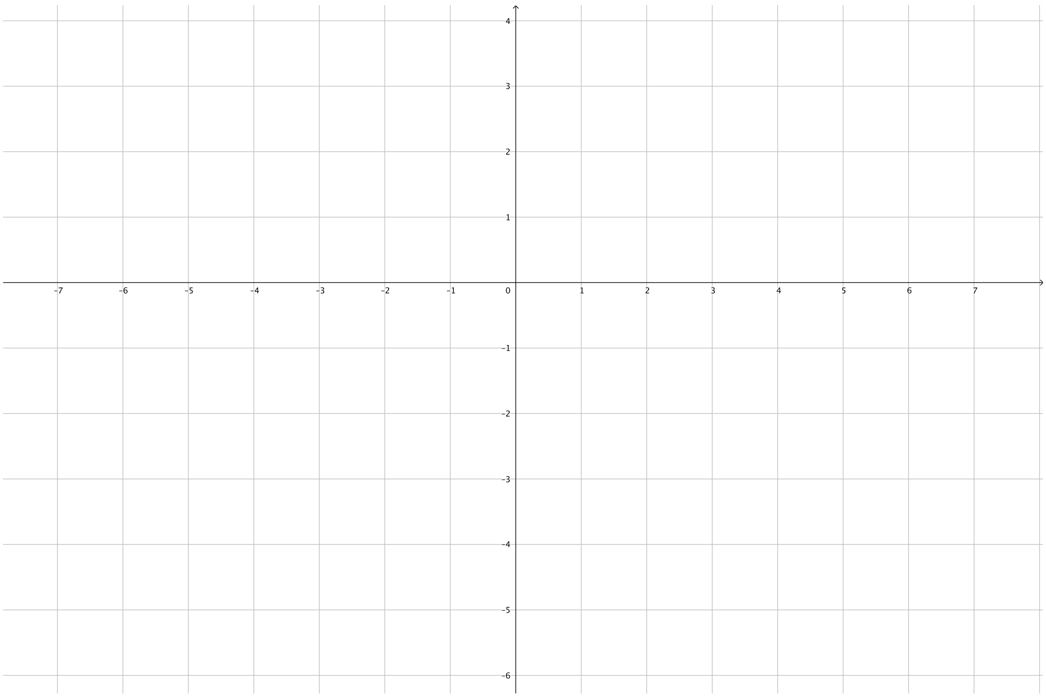


*Soluzione:*

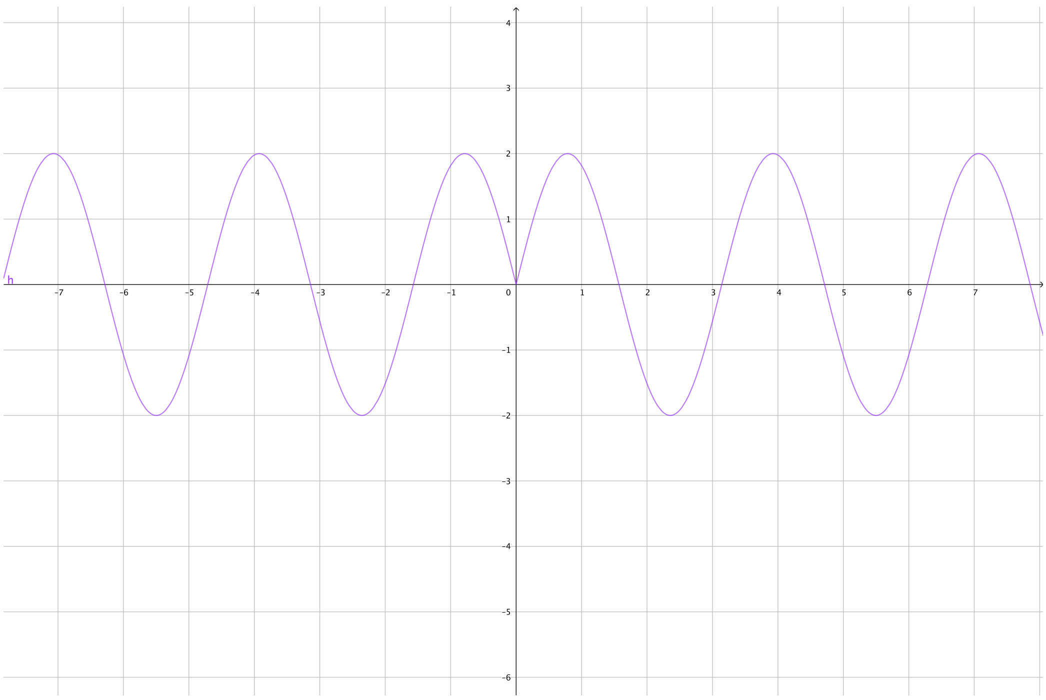


**Esercizio 5** (5 punti)**.** Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}(2|x|)$$



*Soluzione:*



**Esercizio 6** (5 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(1,2,3),(2,5,4) \text{ e } (2,6,2).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di $C$.

*Soluzione:*

(1) I vettori sono linearmente dipendenti perché

$$(1,2,3) + \frac{1}{2}(2,6,2) = (1,2,3) + (1,3,1) = (2,5,4).$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 3 - 8 = 10.$

**Esercizio 7** (7 punti)**.** Diagonalizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Soluzione:* Il polinomio caratteristico è $\lambda - \lambda^3$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Gli autovettori sono $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (-1,1,1)$ e $v_3 = (1,1,3)$. Dunque la matrice diagonale simile a quella data è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$