ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA

26/9/2018

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

(1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.

(2) Voto massimo: **30/30**.

(3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.

(4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.

(5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.

(6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.

(7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.

(8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.

(9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** 14 persone devono mettersi in viaggio e hanno a disposizione una vettura da 7 posti, una da 5 e una moto per 2. Considerando che i proprietari vogliono guidare le loro vetture, quante disposizioni sono possibili? **Motivare la risposta**.

Soluzione: Tolti i 3 proprietari, nella prima vettura si possono trasportare 6 passeggeri scelti tra 11 disponibili (gli altri due proprietari andranno sui rispettivi mezzi): $\binom{11}{6} = 462$. Procediamo in maniera simile per la seconda vettura: $\binom{5}{4} = 5$ e infine l'ultimo andrà sulla moto con il proprietario. Quindi le possibili disposizioni sono $462 \times 5 = 2310$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Data le seguente funzione.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \log(2x+1)} + \frac{\operatorname{sen}(5x+1)}{\sqrt{2-x}}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

Dom(f)=____

- Calcolare la derivata di $f(x)$.

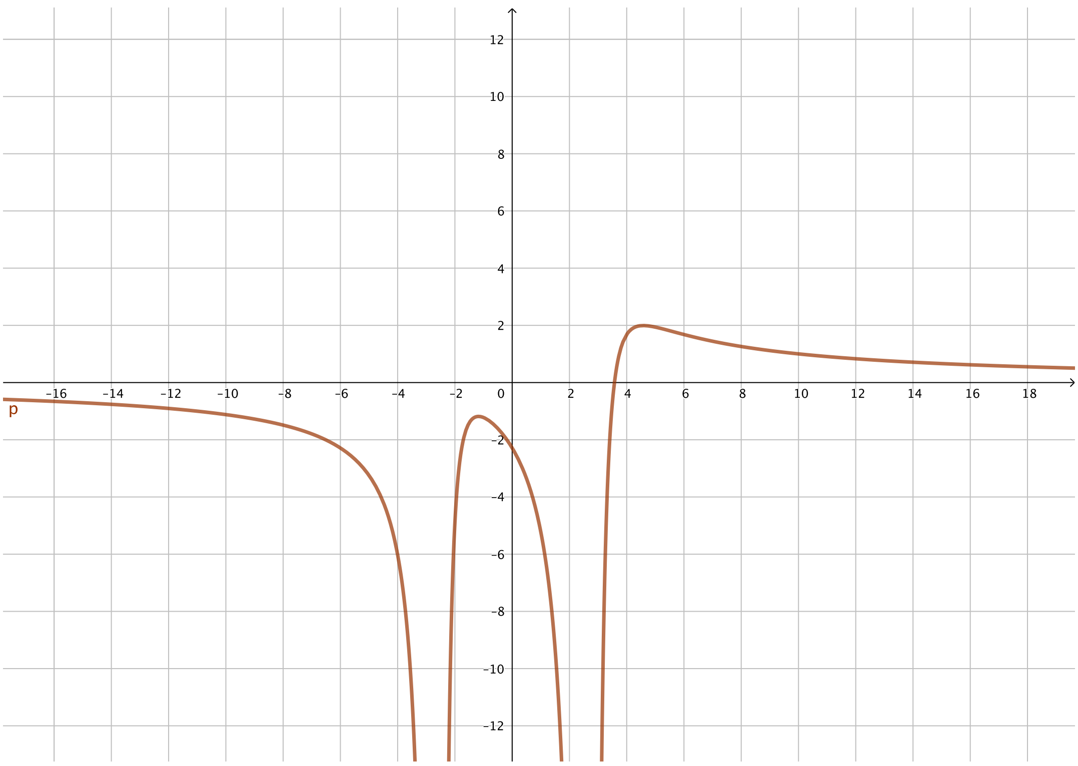
$f'(x)$=____

Soluzione: $Dom(f) = (-\frac{1}{2}, 2) \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \frac{-\frac{2\pi}{2x+1}}{\pi^2 \log^2(2x+1)} + \frac{5\cos(5x+1)\sqrt{2-x} + \frac{\operatorname{sen}(5x+1)}{2\sqrt{2-x}}}{2-x} =$$

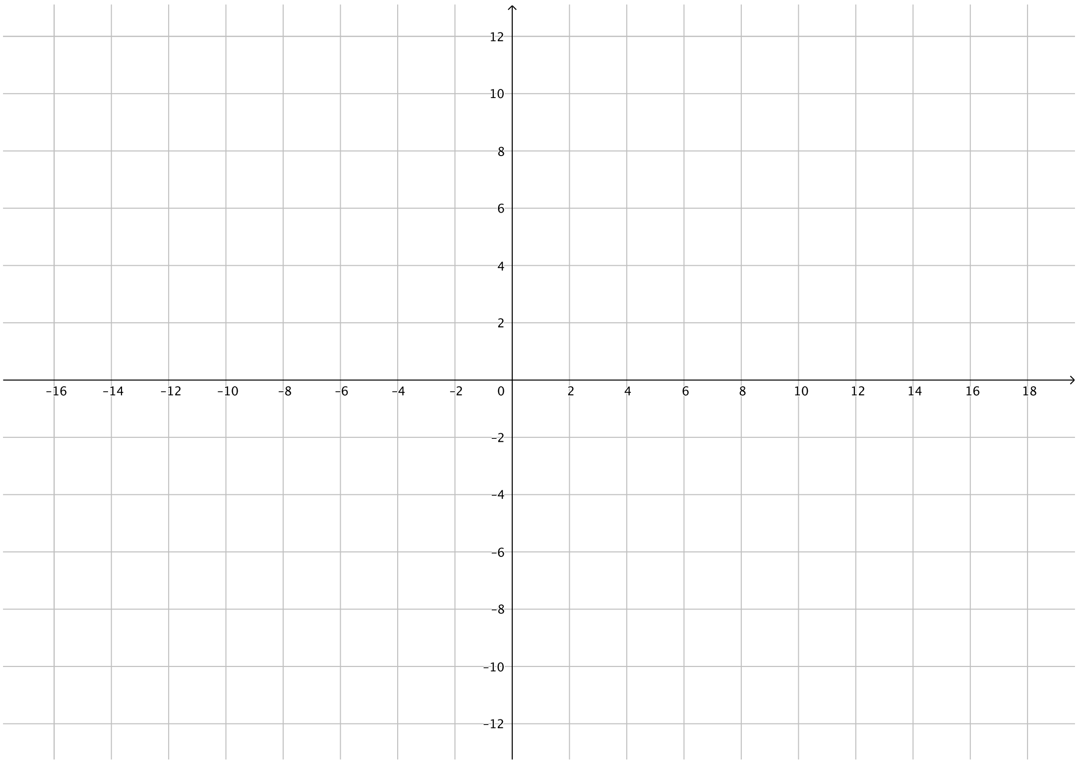
$$= \frac{-2}{(2x+1)\pi \log^2(2x+1)} + \frac{10\cos(5x+1)(2-x) + \operatorname{sen}(5x+1)}{2(2-x)^{\frac{3}{2}}} =$$

Esercizio 3 (6 punti)**.** Si consideri il seguente grafico di $f(x)$

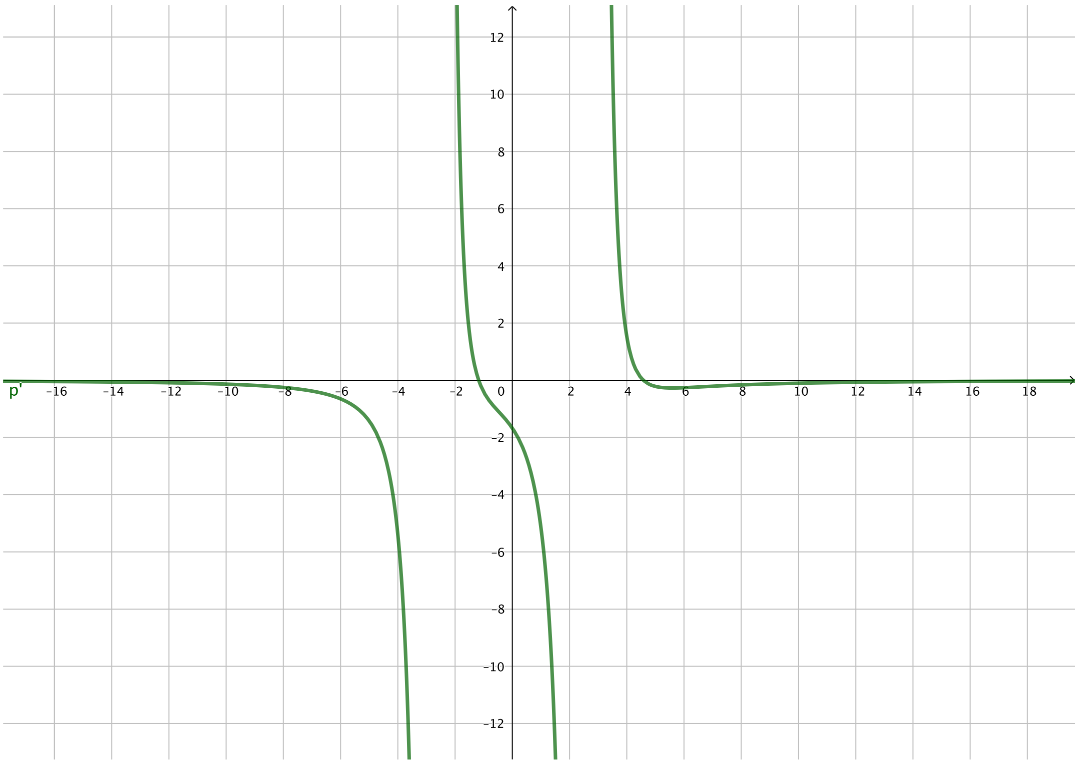


.

Disegnarne la derivata



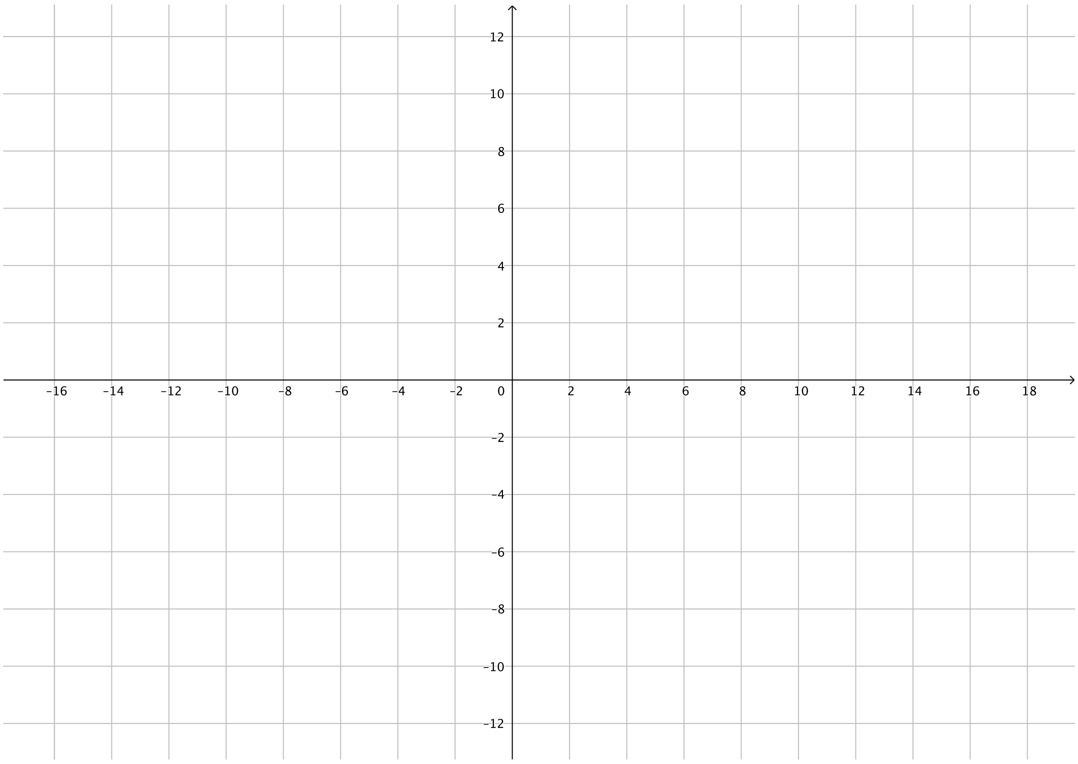
Soluzione:



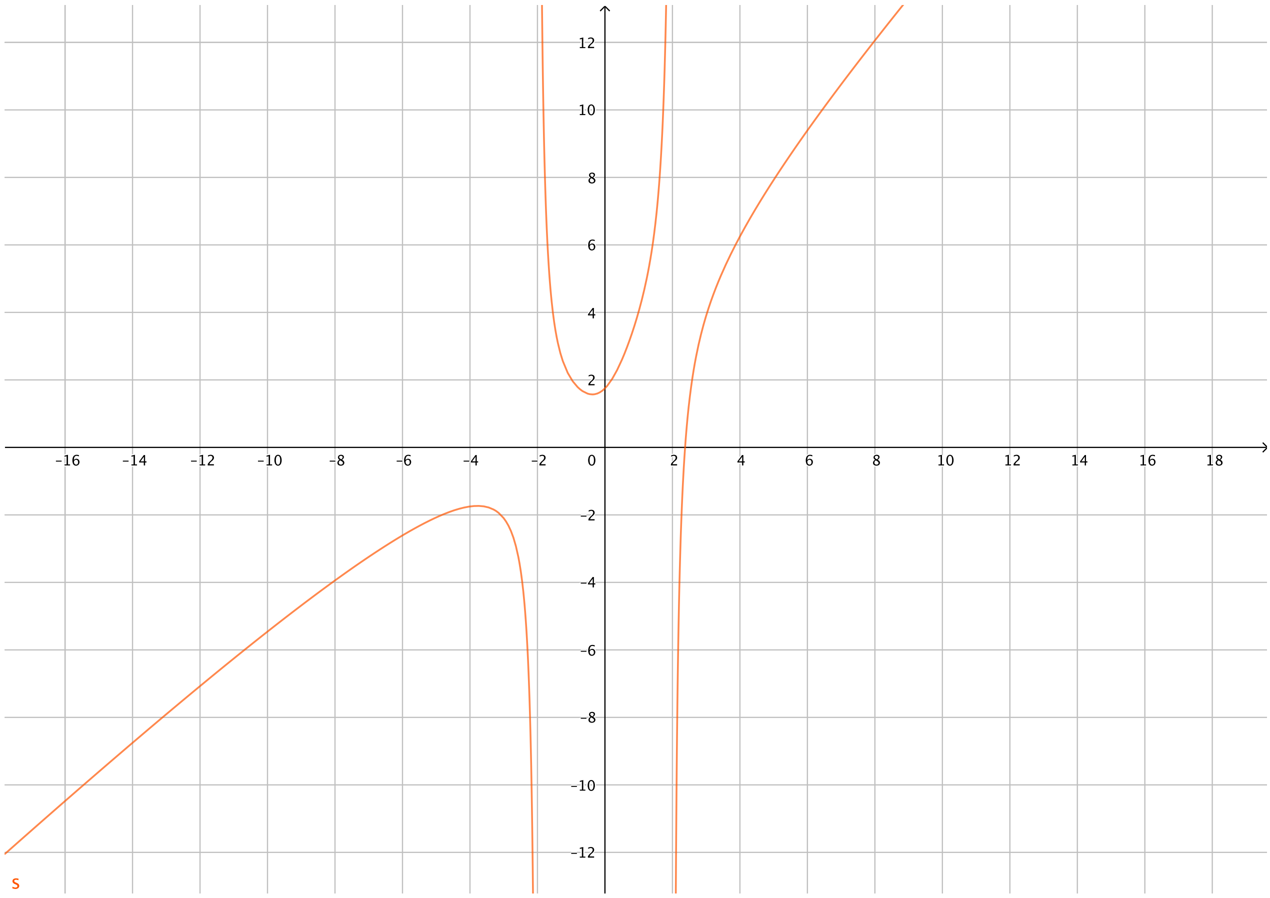
Esercizio 4 (6 punti)**.** Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ con le seguenti proprietà.

(1) $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
(2) $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-2, 2) \cup (2, 5, +\infty)$
(3) $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$,
(4) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$,

(5) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$,
(6) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$,
(7) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$,
(8) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$,
(9) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x > 2$



Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti)**.** Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(-1,1,-1), (2,-1,1) \text{ e } (3,1,1).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di C.

Soluzione:

(1) I vettori sono linearmente indipendenti perché la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo (=-2).

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2.$ Quindi la matrice ha rango 3.

Esercizio 6 (4 punti)**.** Stabilire per quali valori di k il seguente sistema ammette soluzioni e per quali ammette soluzioni non banali.

$$\begin{cases} -x + y - 1z = 0 \\ 2x - ky + z = 0 \\ 3x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Soluzione: Il sistema è omogeneo, quindi ammette sempre almeno la soluzione banale. La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} \text{-1} & 1 & \text{-1} \\ 2 & \text{-k} & 1 \\ 3 & 1 & \text{+k} \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è k^2-5k+2. Poiché il sistema ammette soluzioni non banali quando il determinante è nullo e il polinomio ha soluzioni $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, i valori di k per cui il sistema ammette soluzioni non banali sono $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$.