TERZO APPELLO DI MATEMATICA I (2018/19)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 14/6/19.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Trovare modulo e argomento del numero complesso $-3+i\sqrt{3}$ ed esprimere poi in forma algebrica il numero complesso di modulo 5 ed argomento $7\pi/4$.

Soluzione: Il modulo di $-3+i\sqrt{3}$ è $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$. Per trovare l'argomento dobbiamo trovare un angolo θ tale che $\cos(\theta)=-\frac{3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$. Dunque $\theta=\frac{5}{6}\pi$.

Il numero complesso di modulo 5 ed argomento $7\pi/4$ è $5(\cos(7\pi/4)+i\operatorname{sen}(7\pi/4))=5(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{5}{\sqrt{2}}-i\frac{5}{\sqrt{2}}$

Esercizio 2 (6 punti)**.** Calcolare (se esiste) il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3}$$

Soluzione: Poiché siamo difronte a una forma indeterminata del tipo 0/0 possiamo applicare De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}$$

A questo punto potremmo riconoscere il limite notevole, oppure applicare ancora una volta De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{6x}$$

A questo punto potremmo riconoscere il limite notevole, oppure applicare un'ultima volta De l'Hôpital e ottenere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6}=-\frac{1}{6}.$$

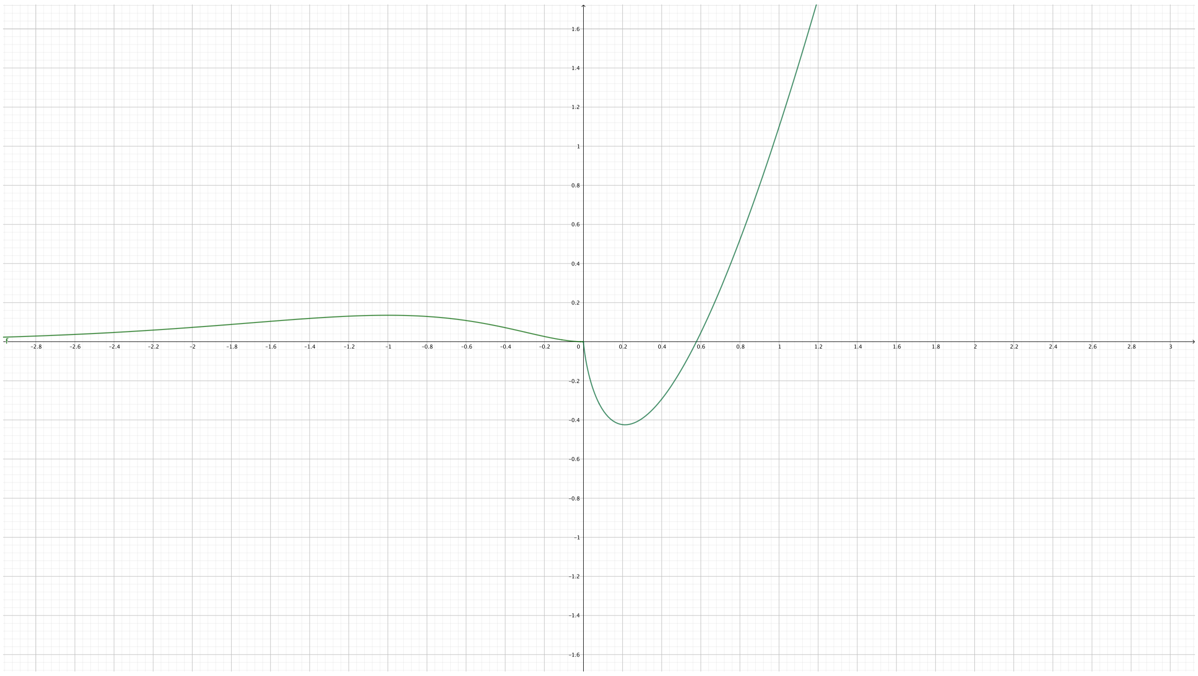
Attenzione! Il seguente procedimento è sbagliato (come più volte sottolineato a lezione)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^3}-\frac{x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)\overset{\text{errore}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

Esercizio 3 (8 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x)=\begin{cases} x\log(3x^2) & \text{per } x>0\\ x^2e^{2x} & \text{per } x\le 0\end{cases}$$

Soluzione:



Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale
$$\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2}dx$$
Soluzione: Procediamo per sostituzione: $\tan(x) = t$, da cui otteniamo $x = \arctan t$ e $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. Dunque
$$\int \frac{2}{(1+\tan(x))^2}dx = \int \frac{2}{(1+t)^2}\frac{1}{(1+t^2)}dt.$$
Utilizziamo il metodo dei fratti semplici:
$$\frac{2}{(1+t)^2}\frac{1}{(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$
Da ciò otteniamo $A = 1, B = 1, C = -1, D = 0$. Dunque:
$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(1+t)^2}\frac{1}{(1+t^2)}dt &= \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{(1+t)^2}dt + \int \frac{-t}{1+t^2}dt \\ &= \log|1+t| - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c \\ &= \log|1+\tan(x)| - \frac{1}{1+\tan(x)} - \frac{1}{2}\log(1+\tan^2(x)) + k.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, motivando la risposta (se è vera spiegare in base a quali teoremi si può motivare, se è falsa fornire un controesempio).

(1) Se $\forall n \in \mathbb{N}\ b_{n+1} > 2b_n$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.
(2) Se $\forall n \in \mathbb{N}\ b_{n+1} > b_n + 1$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.
(3) Se b_n è limitata allora è convergente.
(4) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente.

Soluzione:

(1) Falsa. Si consideri infatti la successione $b_n = -\frac{1}{n^2}$, essa verifica le ipotesi ma tende a 0.
(2) Vera. Infatti una successione del genere è crescente e quindi ammette limite. Inoltre è illimitata, perché per qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n > k$. Infatti si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} > b_1 + n$, quindi basta scegliere n tale che $n > k - b_1 + 1$.
(3) Falsa. Per esempio $b_n = (-1)^n$ è limitata ma non convergente.
(4) Falsa. Per esempio se $b_n = \frac{1}{n}$, allora si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ ma $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.