QUARTO APPELLO DI MATEMATICA I (2018/19)

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 15/7/19.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, vale che $10^n - 1$ è divisibile per 9.

Soluzione: Per induzione. Passo base $10 - 1 = 9$ è ovviamente divisibile per 9. Per il passo induttivo, supponiamo che $10^n - 1$ sia divisibile per 9, quindi esiste un k tale che $10^n - 1 = 9k$. Dimostriamo che anche $10^{n+1} - 1$ è divisibile per 9. Si ha:

$$10 \cdot 10^n - 1 = (9+1) \cdot 10^n - 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n - 1 = 9 \cdot 10^n + 9k = 9 \cdot (10^n + k).$$

Quindi vale l'asserto.

Esercizio 2 (5 punti)**.** Calcolare (se esiste) il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} (x^x)^x$$

Soluzione:

$$\lim_{x \to 0} (x^x)^x = \lim_{x \to 0} x^{x^2} = \lim_{x \to 0} e^{\log x^{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{x^2 \log x} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}}.$$

Quindi il calcolo si riduce a trovare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-\frac{2}{x^2}} = 0.$$

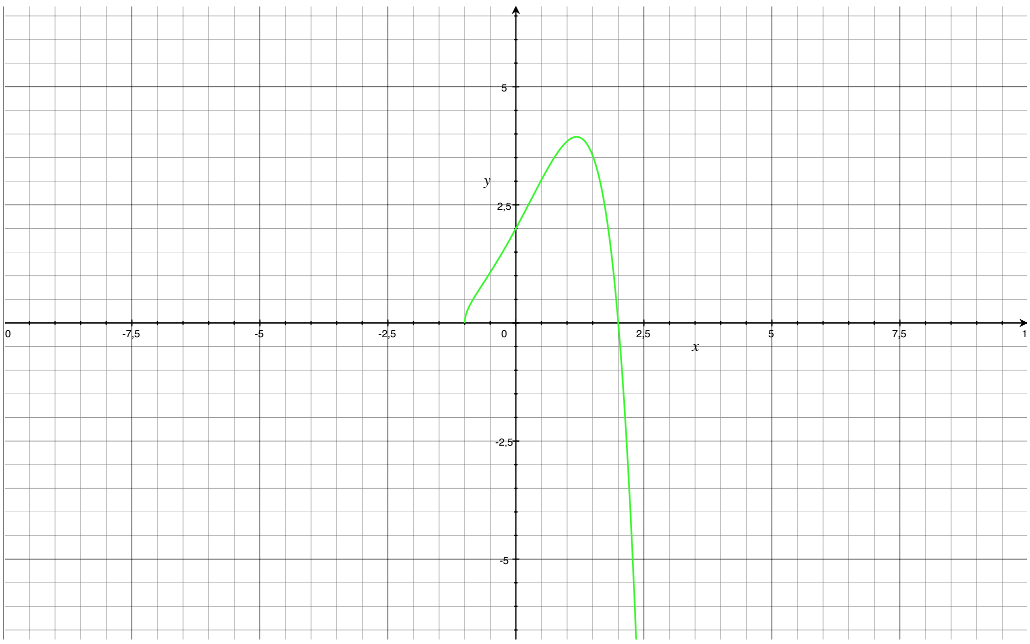
Dove nel secondo passaggio abbiamo usato De l'Hôpital. Infine il limite dato è

$$\lim_{x \to 0} (x^x)^x = \lim_{x \to 0} e^0 = 1.$$

Esercizio 3 (8 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione

$$f(x) = (2-x)\sqrt{x+1}e^x$$

Soluzione:



Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}dx$$

Soluzione: Cominciamo risolvendo l'integrale indefinito associato:

$$\int x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}dx = \int x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} dx + 2\int xe^{-x}dx$$

Il primo integrale è di risoluzione immediata, mentre per il secondo usiamo l'integrazione per parti.

$$\int x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{4}\frac{\left(8+x^4\right)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + c$$

e

$$2\int xe^{-x}dx = 2\left(-xe^{-x} - \int (-e)^{-x}dx\right) = 2\left(-xe^{-x} - (e)^{-x}\right) + d$$

Possiamo quindi risolvere l'integrale improprio applicando la definizione:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^3 \left(8+x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}dx = \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+t^4)^2}} - 2e^{-t}(t+1) + \frac{3}{8}\frac{1}{4} + 2\right] \\ &= \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32}\end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Sia a_n tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2.$$

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa, motivando la risposta (se è vera spiegare in base a quali teoremi si può motivare, se è falsa fornire un controesempio).

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - 2)$ converge.
(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2 = 4$.
(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

Soluzione:

(1) Vera. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, a_n deve necessariamente tendere a 0.
(2) Falsa, perché se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ allora $a_n \to 0$, ma allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - 2 = -2$, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - 2)$ non può convergere.
(3) Falsa, infatti abbiamo che la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

e
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}.$$

(4) Falsa. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, a_n deve necessariamente tendere a 0.