

ESAME DI MATEMATICA 1 PER SCI. AMB. E VCA
5/6/2018

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

ISTRUZIONI,
leggere attentamente.

- (1) Tempo massimo: **2 ore e mezza**.
- (2) Voto massimo: **30/30**.
- (3) È possibile ritirarsi dall'esame, ma non prima di un'ora e mezza dall'inizio.
- (4) Scrivere la soluzione sotto la traccia. Dove richiesto è necessario spiegare le risposte. Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni errate o incoerenti saranno valutate 0.
- (5) È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari. Non si possono usare testi con esercizi svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- (6) Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- (7) Gli unici fogli utilizzabili per la brutta o per i calcoli sono quelli alla fine del compito e vanno staccati solo alla fine dell'esame.
- (8) I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- (9) **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti). Si consideri un mazzo di 40 carte napoletane (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi).

- (1) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere?
- (2) Quanti insiemi di 5 carte ci sono che non contengono nemmeno un asso?
- (3) Quanti insiemi di 5 carte possono avere somma 7?

Motivare le risposte.

Soluzione:

- (1) I possibili insiemi di 5 carte sono dati dalle scelte di 5 su 40 (senza ripetizioni), quindi $\binom{40}{5} = (40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36)/5! \approx 658.000$
- (2) I possibili insiemi di 5 carte che non contengono nemmeno un asso sono dati dalle scelte di 5 su 36 (le rimanenti carte, senza ripetizioni), quindi $\binom{36}{5} = (36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32)/5! \approx 377.000$
- (3) Gli insiemi di 5 numeri maggiori di 0 la cui somma è 7 sono solo $\{1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 1, 2, 2\}$. In un mazzo di carte il primo insieme si presenta 4 volte a seconda del seme del 3, mentre il secondo varia a seconda delle possibili combinazioni dei semi degli 1 e dei 2. Quindi il secondo insieme si presenta in 4 forme diverse, a seconda di quale asso rimane escluso, e ognuno di questi varia a seconda di quali 2 vengono inclusi. Le scelte di 2 carte tra 4 sono $\binom{4}{2} = 6$. Quindi la soluzione è $4 + 4 \cdot 6 = 28$.

Esercizio 2 (7 punti). Data la seguente funzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{e^{x^2 - x}}$$

- Calcolare il dominio di $f(x)$.

Dom(f)=_____

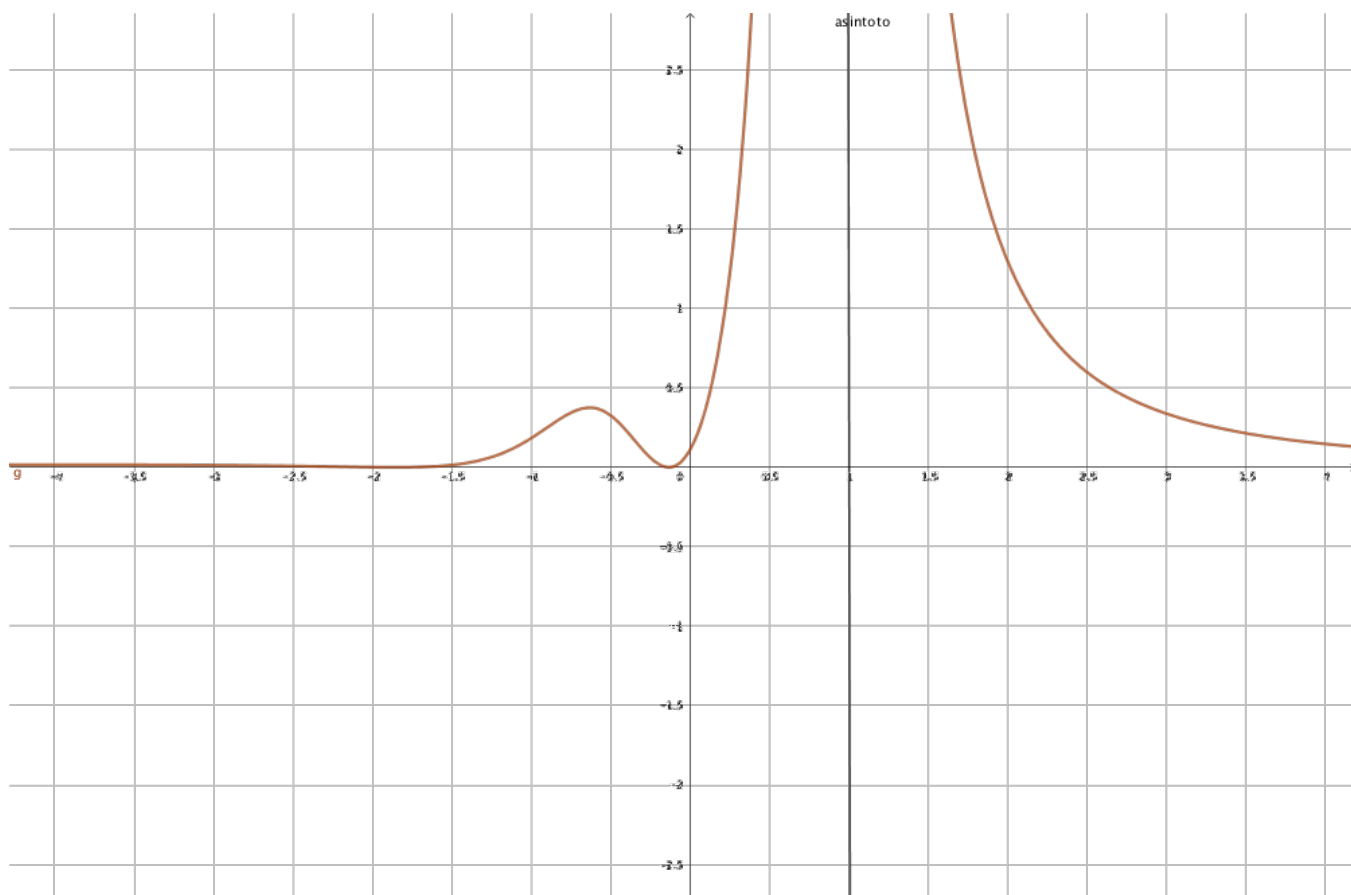
- Calcolare la derivata di $f(x)$.

$f'(x)$ =_____

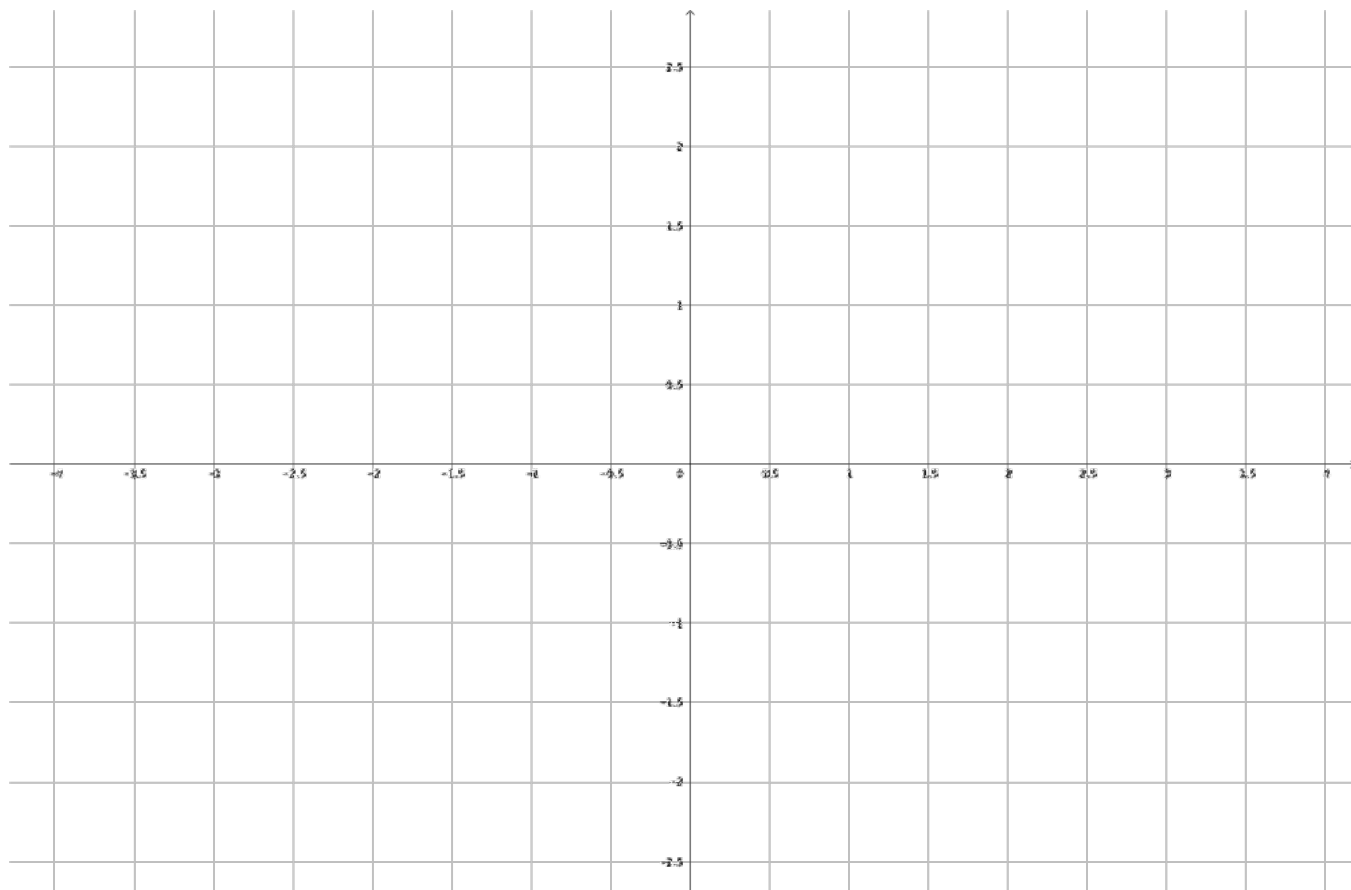
Soluzione: Dom(f) = $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x(e^{x^2-x})}{2\sqrt{x^2-1}} - e^{x^2-x}(2x-1)\sqrt{x^2-1}}{e^{2(x^2-x)}} = \frac{x(e^{x^2-x}) - e^{x^2-x}(2x-1)(x^2-1)}{e^{2(x^2-x)}\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{(e^{x^2-x})(x - (2x-1)(x^2-1))}{e^{2(x^2-x)}\sqrt{x^2-1}} = \frac{x - (2x-1)(x^2-1)}{e^{x^2-x}\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

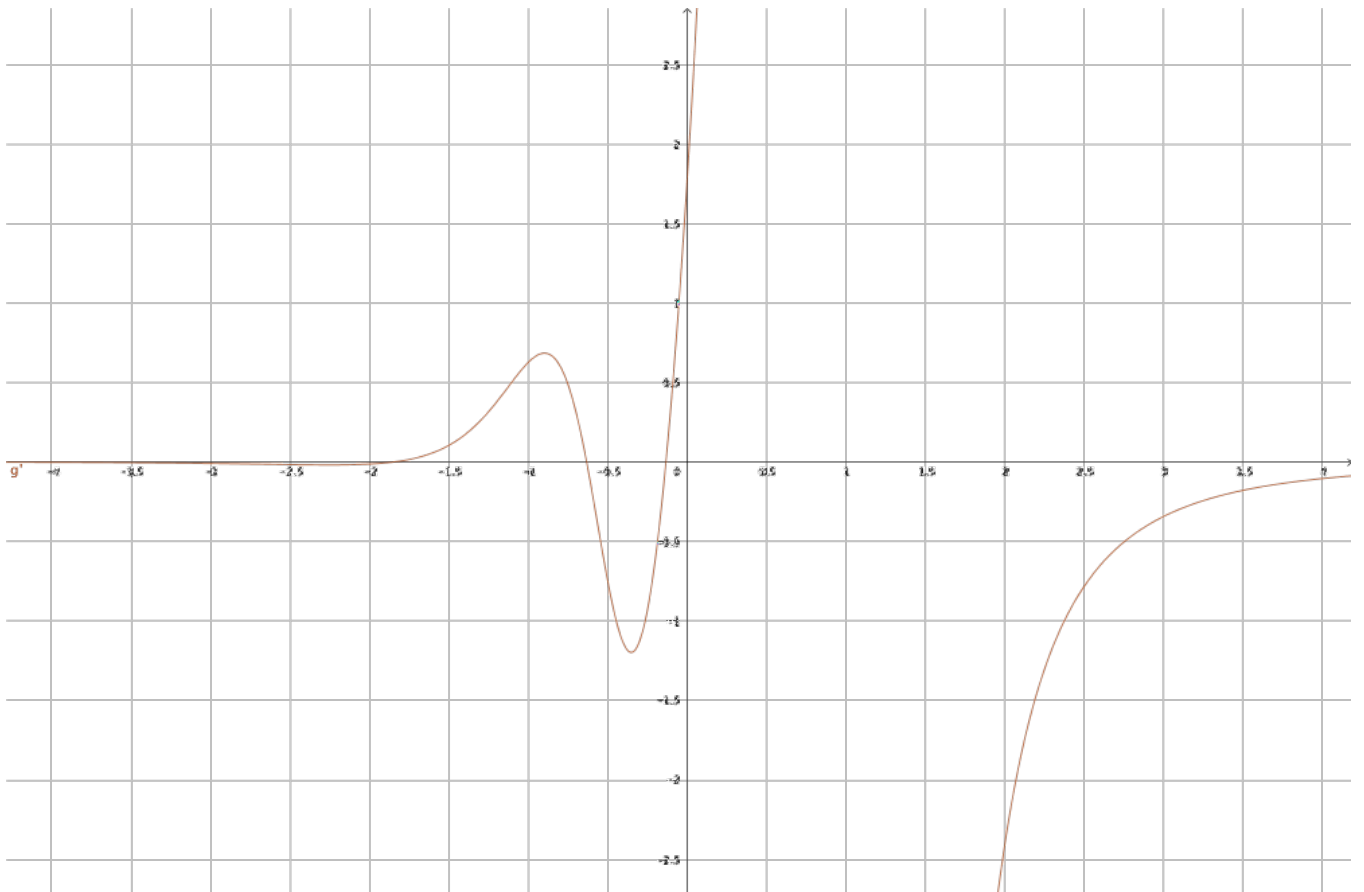
Esercizio 3 (5 punti). Si consideri il seguente grafico di $f(x)$



Disegnarne la derivata

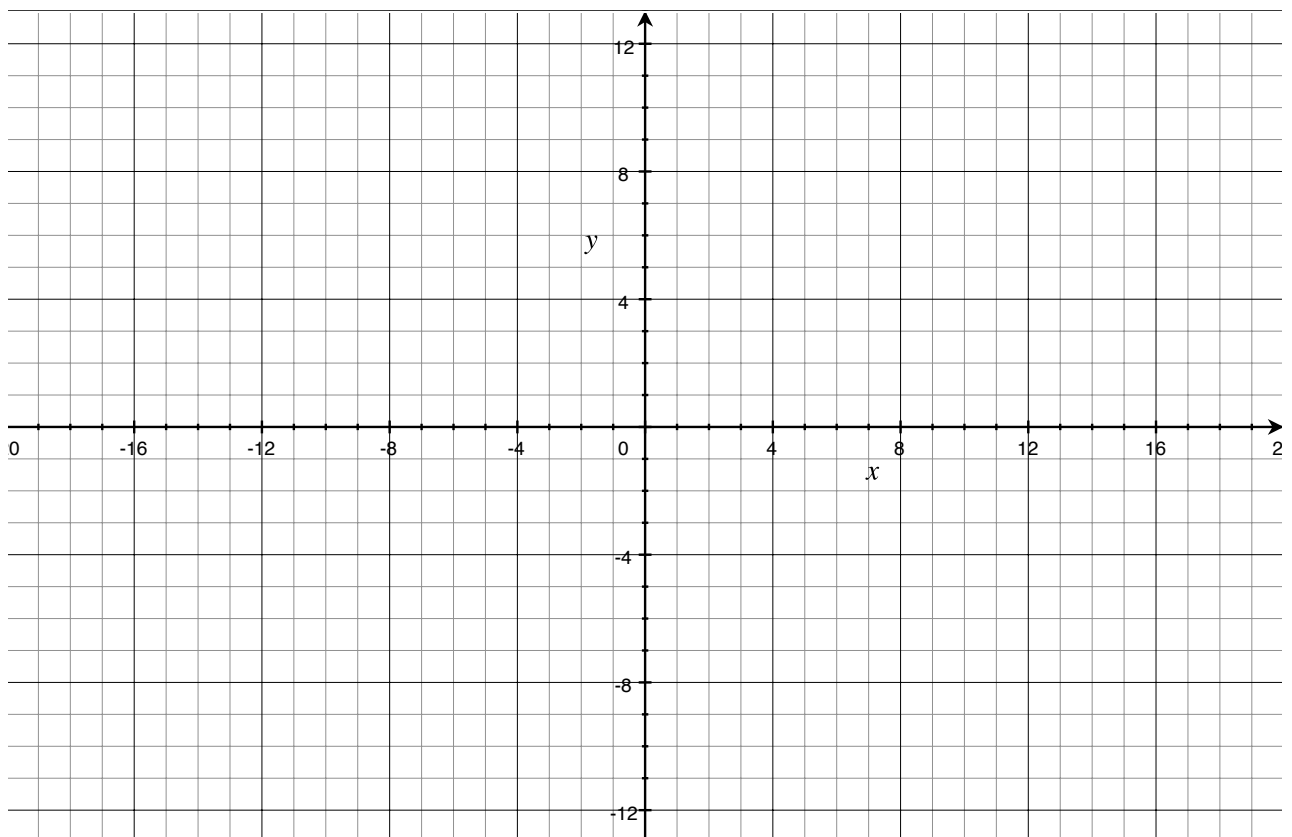


Soluzione:

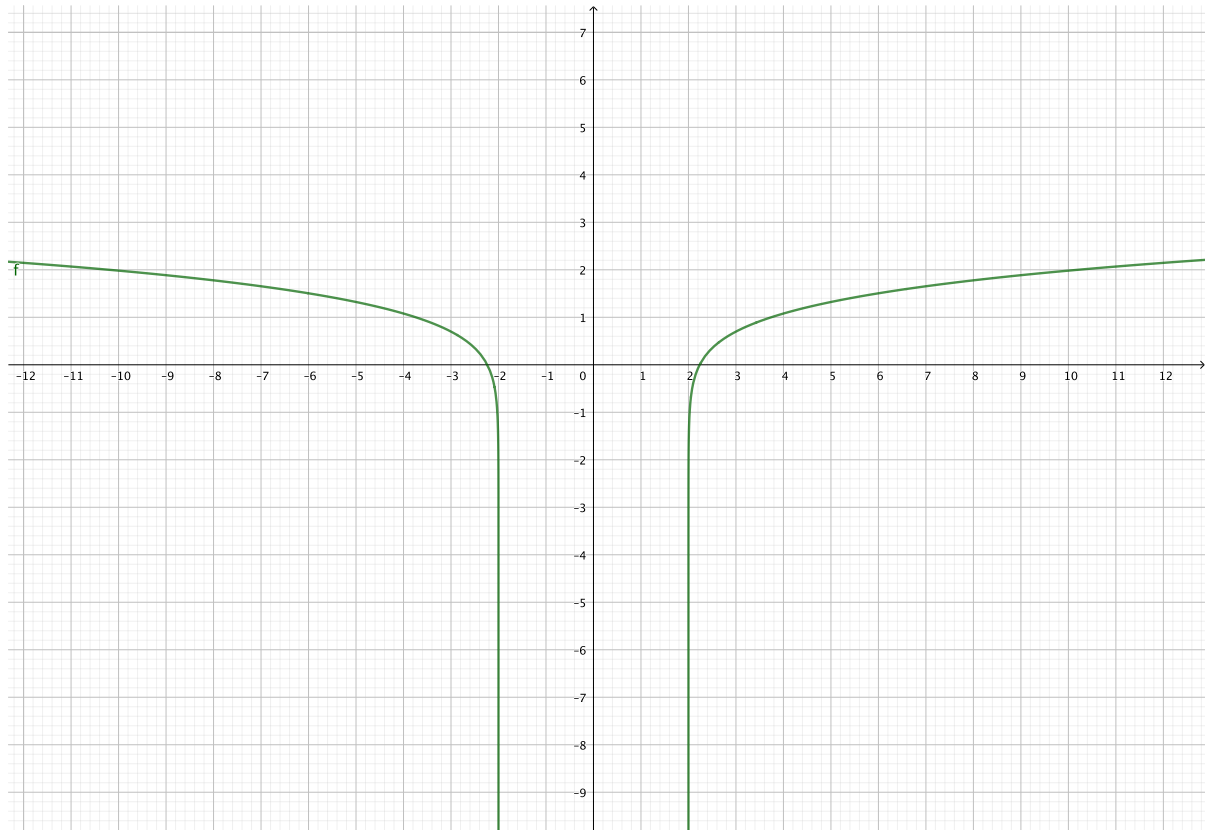


Esercizio 4 (6 punti). Disegnare approssimativamente il grafico della funzione.

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 4)$$



Soluzione:



Esercizio 5 (6 punti). Rispondere alle seguenti domande, **motivando la risposta**.

(1) Dire se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:

$$(1, 2, 3), (2, 5, 4) \text{ e } (2, 6, 2).$$

(2) Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $C = AB$.

(3) Trovare il rango di C .

Soluzione:

(1) I vettori sono linearmente dipendenti perché

$$(1, 2, 3) + \frac{1}{2}(2, 6, 2) = (1, 2, 3) + (1, 3, 1) = (2, 5, 4).$$

(2)

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21 - 3 - 8 = 10, \text{ quindi il rango è } 3.$$

Esercizio 6 (7 punti). Diagonalizzare la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $\lambda - \lambda^3$, quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. Gli autovettori sono $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 3)$. Dunque la matrice diagonale simile a quella data è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$