QUINTO APPELLO DI MATEMATICA I (2018/19)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è possibile consultare testi di teoria o appunti.
- Non è permesso usare alcun foglio aggiuntivo oltre a quelli consegnati all'inizio della prova.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Date: 6/9/19.

Esercizio 1 (6 punti)**.** Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $x > -1$ vale la disuguaglianza $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Soluzione: Per induzione. Passo base. Per $n = 0$, si ha $1 \geq 1$ che è ovviamente valida. Per il passo induttivo, supponiamo che valga $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Allora, poiché $x > -1$ abbiamo $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$. Quest'ultima si può riscrivere come $(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$ e siccome $nx^2 \geq 0$ vale $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, dunque $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ e quindi il passo induttivo è dimostrato.

Esercizio 2 (5 punti)**.** Calcolare (se esiste) il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\log(1+x^2) + \cos(2x) - 1}{x^4}$$

Soluzione: Applicando gli sviluppi di Taylor delle funzioni logaritmo fino al secondo grado e coseno fino al quarto otteniamo

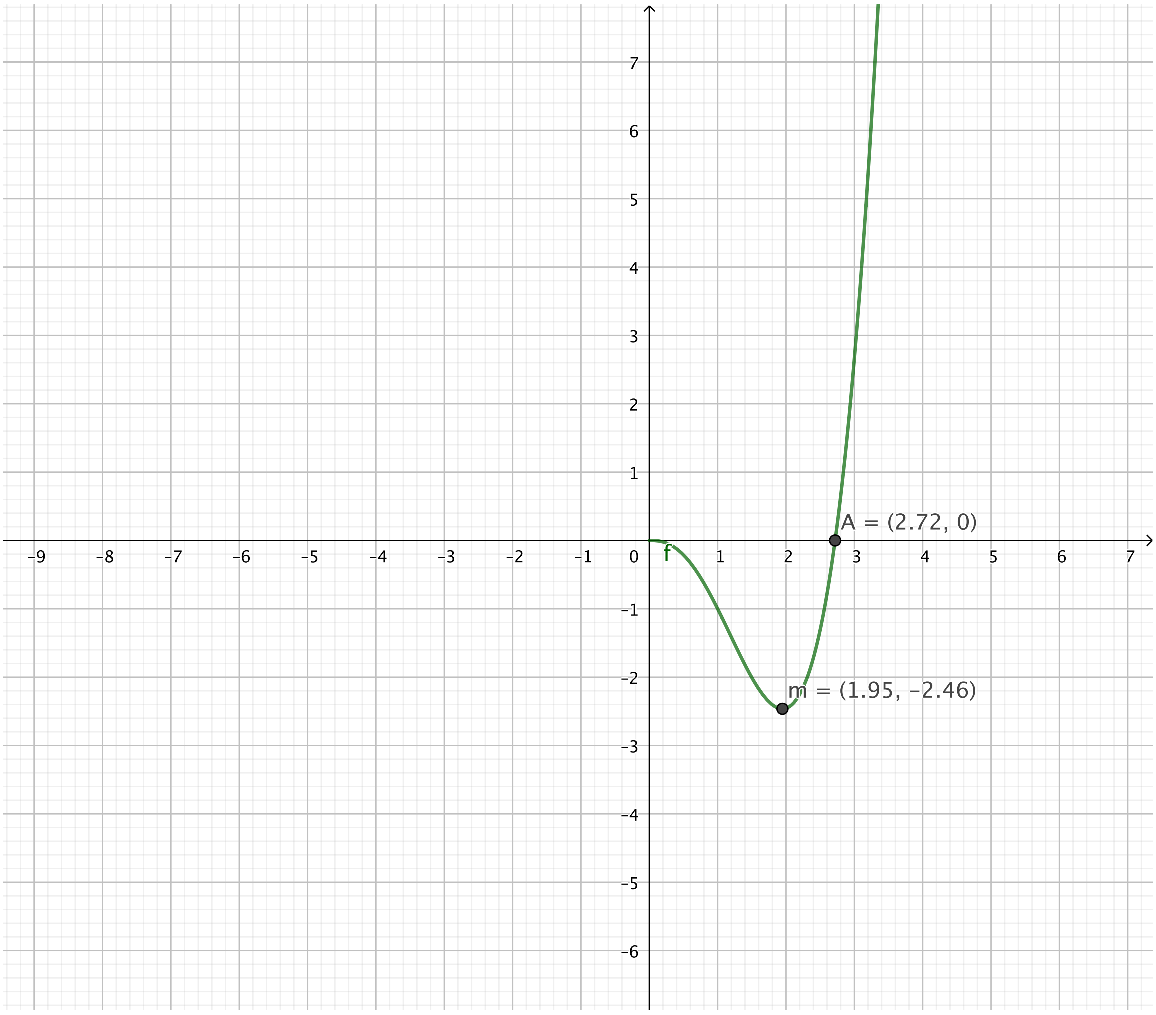
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{2\log(1+x^2) + \cos(2x) - 1}{x^4} &= \lim_{x \to 0} \frac{2(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)) + 1 - 4\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - 1}{x^4} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x^4 + 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 + o(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (8 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^3(\log(x) - 1).$$

Soluzione:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$.
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 3x^2 \log(x) - 2x^2$, $f''(x) = 6x \log(x) - x$


A = (2.72, 0)
m = (1.95, −2.46)
f

Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale improprio

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx$$

Soluzione: Cominciamo risolvendo l'integrale indefinito associato, tramite la sostituzione $t = \sqrt{2x}$, che ci dà $t^2 = 2x$ e $2tdt = 2dx$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx = \int \frac{t}{t(t^2+1)} dt = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t + c = \arctan \sqrt{2x} + k$$

Possiamo quindi risolvere l'integrale improprio applicando la definizione:

$$\begin{aligned} \int_{1/2} +\infty \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_{1/2}^{b} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx \\ &= \lim_{b \to +\infty} [\arctan \sqrt{2x}]_{1/2}^{b} \\ &= \lim_{b \to +\infty} [\arctan \sqrt{2b} - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Si studi il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} \end{cases}$$

Soluzione: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \geq 2$. Infatti, utilizzando il principio induzione abbiamo che la proprietà è vera $n = 0$ e se è vero che $a_n \geq 2$, allora anche

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2+1)}{2} \geq a_n^2 + 1 \geq 2,$$

dove la prima disuguaglianza vale perché $a_n/2 \geq 1$ per ipotesi induttiva. Dunque la successione è monotona crescente, infatti

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + a_n}{2} = \frac{a_n(a_n^2+1)}{2} \geq a_n^2 + 1 \geq a_n$$

Possiamo dunque asserire che il limite della successione esiste, finito o infinito. Supponiamo che sia un valore finito ℓ, allora passando al limite nella definizione della successione si ha:

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n^3 + a_n}{2} = \frac{\ell^3 + \ell}{2}$$

Dunque ℓ dovrebbe soddisfare l'equazione $\ell = \frac{\ell^3+\ell}{2}$, cioè $\frac{\ell^3-\ell}{2} = 0$ che è valida solo se ℓ è uguale a -1, 0 o 1. Ma nessuno dia questi valori è ammissibile perché la successione è tutta maggiore di 2, dunque il limite è $+\infty$.