LOGICHE POLIVALENTI

VINCENZO MARRA, FRANCO MONTAGNA, LUCA SPADA

1. Introduzione

Le logiche a più valori sono logiche adatte al trattamento di dati vaghi o imprecisi o inaffidabili. Mentre la logica classica non prende in considerazione questo tipo di informazione e non è interessata a conclusioni che non è in grado di stabilire con certezza, le logiche a più valori studiano anche fenomeni in cui l'imprecisione è presente, secondo lo slogan: *meglio disporre di dati imprecisi o non del tutto affidabili piuttosto che non avere alcuna informazione.*

È intuibile quindi che le logiche a più valori siano strettamente legate alla probabilità. Il libro *Metamathematics of Fuzzy Logic* di Petr Hájek [32] contiene una interessante discussione sui rapporti fra le due discipline. Hájek spiega che, mentre le logiche a più valori si occupano di concetti vaghi e utilizzano *gradi di verità*, la probabilità si occupa di eventi che sono incerti ora ma che diverranno veri oppure falsi in seguito, e utilizza *gradi di credenza*. Le due discipline sono dunque distinte, ma anche intimamente legate fra loro. Una importante connessione è presente già nel libro citato: la probabilità di un evento ϕ può essere vista come il grado di verità di $\Pr(\phi)$, dove Pr rappresenta la modalità *Probabilmente*. Un secondo legame consiste nella possibilità di introdurre una probabilità su eventi a più valori. Quest'ultimo aspetto costituirà uno degli spunti di riflessione analizzati in questo articolo.

Tra le logiche a più valori quella di Łukasiewicz gioca un ruolo particolarmente importante e, attraverso la sua semantica algebrica data dalle MV-algebre, ha sorprendenti connessioni con svariati settori dell'algebra, della geometria e dell'analisi funzionale. Ad esempio, in [44] si dimostra che la varietà delle MV-algebre forma una categoria equivalente a quella dei gruppi abeliani reticolari con unità forte, una classe di strutture non assiomatizzabili al primo ordine. Storicamente questo risultato ha costituito un importante punto di incontro tra la comunità dei logici polivalenti e quella dei teorici dei gruppi ordinati, a beneficio di entrambe. La monografia [15] fornisce un primo resoconto comprensivo della sinergia risultante fra queste due comunità, mentre la monografia [45] conduce il lettore alle frontiere della ricerca MV-algebrica presentando gli stretti legami di queste strutture con la geometria poliedrale.

Anche se i temi che presenteremo in questo articolo sono attuali e di grande interesse teorico, di certo essi non esauriscono le linee di ricerca nel settore delle logiche a più valori, neppure se ci restringiamo al panorama nazionale. Per questo, a beneficio dei giovani logici che volessero iniziare un percorso di ricerca nel campo delle logiche polivalenti, faremo una breve panoramica delle linee di ricerca e delle competenze dei gruppi di ricerca italiani che si occupano di logica polivalente.

2. Breve presentazione dei gruppi di ricerca

La ricerca italiana sulle logiche a più valori si svolge prevalentemente in tre aree dell'Italia omogeneamente distribuite dal punto di vista geografico: Firenze/Siena, Milano/Varese e Salerno.

Il gruppo di Firenze/Siena, che annovera tra i suoi membri Leonardo Cabrer, Hector Freytes, Daniele Mundici e il secondo autore, ha dato da sempre un fortissimo impulso alla ricerca sulle logiche a più valori. Firenze vanta un livello di specializzazione nello studio della logica di Łukasiewicz di primo piano a livello mondiale. Daniele Mundici è infatti autore delle uniche due monografie esistenti sulle MV-algebre, oltre a essere il precursore di numerosi strumenti cruciali nello studio delle MV-algebre come ad esempio il funtore Γ tra MV-algebre e gruppi reticolari abeliani con unità forte, la teoria degli stati su MV-algebre e l'uso di sofisticati strumenti di geometria poliedrale nello studio delle MV-algebre finitamente presentate. Siena invece ha fornito risultati sulle BL-algebre di Hájek che sono ormai imprescindibili nel loro studio, ha introdotto metodi per dimostrare la completezza standard di logiche polivalenti che si sono dimostrati applicabili universalmente e ha dato importanti contributi allo studio delle probabilità su eventi incerti.

Il gruppo di Milano/Varese conta tra i suoi membri Stefano Aguzzoli, Brunella Gerla e il primo autore, oltre a diversi ricercatori postdoc quali Matteo Bianchi, Pietro Codara, Tommaso Flaminio, Daniel McNeill e Andrea Pedrini. L'esistenza di questo gruppo è dovuta alla lunga permanenza di Daniele Mundici presso il Dipartimento di Informatica dell'Università di Milano: i membri accademicamente più anziani del gruppo sono infatti suoi ex allievi. Gli interessi di ricerca a Milano/Varese spaziano dai gruppi e gli spazi lineari reticolarmente ordinati alle MV-algebre e alla logica di Gödel-Dummett, passando per la logica NM. Il gruppo ha provato importanti risultati sui gruppi reticolari abeliani, su probabilità su logiche a più valori, nonché vari risultati di dualità per classi di algebre connesse alle logiche polivalenti. Il gruppo di Milano/Varese è anche molto attivo dal punto di vista organizzativo. Si deve a loro, ad esempio, la serie di conferenze *ManyVal*, giunta alla quinta edizione. Inoltre il gruppo ha ottenuto un finanziamento *FIRB-Futuro in Ricerca* per il progetto "Probability theory of non-classical events".

Del gruppo di Salerno fanno parte Antonio Di Nola, Annarita Ferraioli, Gianni Gerla, Serafina Lapenta, Giacomo Lenzi, Ada Lettieri, Anna Carla Russo, Donato Saeli e il terzo autore. Anche in questo caso l'esistenza di questo gruppo è dovuta prevalentemente alla presenza, prima a Napoli e poi a Salerno, di Giangiacomo Gerla e Antonio Di Nola che sono stati precursori nello studio delle logiche a più valori. A quest'ultimo si devono fra l'altro un teorema di rappresentazione funzionale per tutte le MV-algebre (anche conosciuto come Teorema di Di Nola), la scoperta di equivalenze categoriali tra le categorie di MV-algebre e categorie di gruppi, anelli, e semi-anelli, e la scoperta di una assiomatizzazione equazionale di tutte le varietà di MV-algebre. Il gruppo è ad oggi molto attivo anche sul piano organizzativo, coordinando vari progetti di ricerca nazionali e internazionali e mantenendo vive importanti collaborazioni internazionali.

3. La probabilità in termini di scommesse

Secondo l'impostazione frequentista, la probabilità di un evento è il limite della frequenza dell'evento stesso quando il numero degli esperimenti tende a infinito. Questa impostazione si basa sulla possibilità di ripetere un esperimento un grande numero di volte nelle stesse condizioni. Ora, non solo questa ipotesi raramente viene completamente verificata, ma ci sono casi in cui non è possibile, o almeno non è conveniente, effettuare molti esperimenti. Ad esempio, per calcolare la probabilità che un ponte sullo stretto di Messina resista per 200 anni, occorrerebbe costruire migliaia di ponti e poi, dopo 200 anni, calcolare la percentuale dei ponti che hanno resistito.

Dovendo prendere una decisione che coinvolge eventi non sperimentati, l'unico modo possibile per assegnare a essi una probabilità è di chiedersi quanto sarebbe equo scommettere, in cambio della posta unitaria, su tali eventi.

Si noti che, secondo questa impostazione, non esiste una probabilità assoluta: individui diversi possono avere modi di vedere diversi e assegnare quindi probabilità diverse a uno stesso evento. Inoltre, mentre l'assunzione dell'esistenza di un essere onnisciente porta all'esistenza di una verità assoluta, tale assunzione non porta invece a una probabilità assoluta: infatti l'essere onnisciente sa se l'evento si verificherà oppure no, quindi per lui parlare di probabilità sarebbe privo di senso.

Bruno de Finetti [18] propose allora il seguente paradigma:

Definizione 3.1. La probabilità di un evento a è la quota α che un allibratore *onesto* proporrebbe per la seguente scommessa: pagare una quota $\lambda\alpha$ per ricevere λ se a si verifica o niente in caso contrario.

Osservazione 3.2.

1. In una scommessa reale, lo scommettitore paga λ e se a si verifica riceve in cambio $\frac{\lambda}{\alpha}$. Ad esempio, se attribuisco probabilità $\frac{1}{5}$ alla vittoria dell'Italia contro la Spagna, si dice che tale vittoria viene data 5 a 1, ossia puntando λ si vince, in caso di vittoria dell'Italia, $5\lambda = \frac{\lambda}{\frac{1}{5}}$. È chiaro che i due giochi sono equivalenti, in quanto si passa da uno all'altro moltiplicando tutto per α (rispettivamente, per $\frac{1}{\alpha}$).
2. Per de Finetti essere onesto significa consentire allo scommettitore scommesse negative, dove scommettere $-\lambda$ equivale a scommettere λ ma a ruoli rovesciati. In altre parole, se lo scommettitore dovesse considerare la quota poco equa, può chiedere uno scambio dei ruoli.

Immaginiamo ora una situazione in cui l'allibratore (in inglese, "bookmaker") B accetta scommesse su eventi $a_1, \ldots, a_n$, a cui assegna le probabilità $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Lo scommettitore S potrà scommettere le quote, eventualmente negative, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, e il guadagno o la perdita (ossia il *payoff*) di B sarà allora

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\alpha_i - v(a_i)), \tag{1}$$

dove $v(a_i) = 1$ se a_i è vero e $v(a_i) = 0$ se a_i è falso.

L'unica condizione di razionalità richiesta da de Finetti è la *coerenza*, che viene definita qui sotto.

Definizione 3.3. Una assegnazione di probabilità $a_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, a_n \mapsto \alpha_n$ è detta *coerente* se non esiste un sistema di scommesse che determina una perdita sicura per B, ossia se non esistono numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che per ogni valutazione v sia $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\alpha_i - v(a_i)) < 0$.

Esempio 3.4. In una partita di calcio l'assegnazione $1 \mapsto \frac{1}{2}, X \mapsto \frac{1}{3}, 2 \mapsto \frac{1}{3}$ non è coerente: scommettere -1 su ciascuno dei tre eventi determina una vincita sicura per lo scommettitore e quindi una perdita sicura per B. Invece l'assegnazione $1 \mapsto \frac{1}{2}, X \mapsto \frac{1}{2}, 2 \mapsto 0$ è coerente.

Osservazione 3.5. È importante notare che una volta che l'insieme dei possibili eventi sia stato fissato, essi possono essere composti tra di loro per formare nuovi eventi tramite operazioni logiche. Se la logica in considerazione è quella classica, si ha allora un'algebra di Boole che chiameremo *algebra di Boole degli eventi*. Tuttavia, come vedremo in seguito, a seconda della natura degli eventi in considerazione, questi possono essere combinati utilizzando connettivi diversi da quelli della logica classica, formando così strutture algebriche differenti dalle algebre di Boole.

Definizione 3.6. Una *misura di probabilità* (*finitamente additiva*) è una funzione μ dall'algebra di Boole degli eventi in $[0,1]$ tale che, indicato con Ω l'evento certo e con $\emptyset$ l'evento impossibile, valgano le seguenti proprietà:

(1) $\mu(\Omega) = 1$,
(2) se $a_1 \cap a_2 = \emptyset$, allora $\mu(a_1 \cup a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2)$.

Teorema 3.7 (de Finetti, [18])**.** *Un'assegnazione $a_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, a_n \mapsto \alpha_n$ è coerente se e solo se, detta A l'algebra di Boole degli eventi $a_1, \ldots, a_n$, esiste una misura di probabilità $\mu\colon A \to [0,1]$ tale che valga $\mu(a_i) = \alpha_i$ per $i = 1, \ldots, n$.*

Accenneremo alla dimostrazione del teorema nel caso più generale di eventi polivalenti.

4. Probabilità per eventi a più valori

De Finetti non prese in considerazione eventi con valori di verità intermedi. Per questo aspetto l'impostazione di de Finetti è del tutto classica: un evento può essere solamente vero o falso e ci deve essere un modo per verificare quale delle due eventualità si presenta.

Si può però obiettare al punto di vista classico. Eventi con valori di verità intermedi (come ad esempio, *ci sarà traffico nell'autostrada*, o *ci sarà turbolenza nell'andamento dei mercati finanziari*), sono all'ordine del giorno ed influenzano regolarmente le nostre decisioni. In un certo senso, ogni volta che prendiamo una decisione scommettiamo su un evento a più valori. Questa osservazione suggerisce la possibilità di interpretare gli eventi non come formule della logica classica ma come formule di altre logiche, ad esempio quelle della logica di Łukasiewicz. Da un punto di vista algebrico, questo corrisponde a interpretare gli eventi come elementi di una MV-algebra. Ricordiamo che una MV-algebra è un'algebra $(A, \oplus, \neg, 0)$ tale che posto $1 = \neg 0$ si abbia:

(1) $(A, \oplus, 0)$ è un monoide commutativo;
(2) $\neg\neg x = x$ e $x \oplus 1 = 1$;
(3) $x \oplus (\neg(\neg y \oplus x)) = y \oplus (\neg(\neg x \oplus y))$.

L'assiomatizzazione qui sopra, più semplice rispetto a quella originariamente proposta da Chang, è dovuta a Mangani [39]. Esempi notevoli di MV-algebre sono l'algebra

$$([0,1], \oplus, \neg, 0)$$

con $x \oplus y = \min\{x+y, 1\}$ e $\neg x = 1 - x$, e l'algebra $C(X, [0,1])$ delle funzioni continue da uno spazio compatto di Hausdorff X a $[0,1]$, con le operazioni

$(f \oplus g)(x) = \min\{f(x) + g(x), 1\}$ e $(\neg f)(x) = 1 - x$. Nelle considerazioni che seguono sarà importante tenere a mente il fatto che ogni MV-algebra semi-semplice[1] è sottalgebra di un'algebra della forma $C(X, [0,1])$. In altri termini, i membri di un'ampia classe di MV-algebre sono rappresentabili come algebre di funzioni continue a valori in $[0,1]$ su uno spazio compatto di Hausdorff. Tale risultato è un'immediata conseguenza del teorema di dualità 7.10 che analizzeremo in seguito.

Possiamo dunque pensare agli elementi di una MV-algebra come a "eventi polivalenti", o "eventi MV". Costruzioni per analogia di questo genere possono ben essere sottoposte a critica. Ma anche il più classico dei logici non può certo ignorare l'importanza delle variabili causali e del loro valore atteso, e del resto lo stesso de Finetti ne era profondamente convinto. Ora, la rappresentazione delle MV-algebre semi-semplici appena ricordata ci consente di pensare agli eventi MV come variabili causali continue a valori in $[0,1]$. Viceversa, una variabile casuale continua su uno spazio compatto di Hausdorff X si può ridurre con una trasformazione lineare a una variabile causale continua a valori in $[0,1]$, e quindi a un evento MV. Così, attraverso gli eventi MV possiamo rappresentare le variabili causali continue su un compatto di Hausdorff. Sembra naturale interpretare la probabilità di un evento MV come il valore atteso della corrispondente variabile causale. La formalizzazione di questa idea intuitiva è costituita dal concetto di *stato*.

Definizione 4.1 ([45])**.** Uno *stato* di una MV-algebra A è una funzione s da A a $[0,1]$ tale che:

(1) $s(1) = 1$,
(2) per ogni $a, b \in A$ con $a \odot b = 0$ si abbia: $s(a \oplus b) = s(a) + s(b)$.

Una *valutazione* di una MV-algebra A è un omomorfismo v da A alla MV-algebra $[0,1]$. Ad ogni elemento $a \in A$ rimane associata una funzione $a^*(v)$ dallo spazio delle valutazioni in $[0,1]$, definita per ogni valutazione v da

$$a^*(v) := v(a). \tag{2}$$

Poiché l'insieme delle valutazioni è un sottoinsieme della potenza $[0,1]^A$, esso ne eredita la topologia prodotto, diventando così uno spazio compatto di Hausdorff V. Le funzioni a^* risultano allora continue da V a $[0,1]$.

Un teorema dimostrato indipendentemente da Panti [48] e da Kroupa [37], utilizzando il Teorema di Rappresentazione di Riesz, afferma che:

Teorema 4.2. *Per ogni stato s di una MV-algebra A esiste un'unica misura di probabilità di Borel regolare μ su V tale che si abbia*

$$s(a) = \int_V a^*(v)\,\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

per ogni $a \in A$.

In conclusione, gli eventi MV possono essere interpretati come variabili casuali, e uno stato può essere pensato come una funzione *valore atteso* rispetto a una misura univocamente determinata.

Ma anche l'altro lato della medaglia, ossia l'interpretazione in termini di scommesse, si estende dal caso booleano al caso MV. Innanzitutto la coerenza di una

[1]Ricordiamo che in algebra universale si definisce *semi-semplice* un'algebra che sia rappresentabile come prodotto sottodiretto di algebre semplici, ossia prive di congruenze non banali (si veda ad esempio [12]).

assegnazione si definisce come nel caso classico: un'assegnazione è coerente se esclude la possibilità di perdita certa per B. L'unica differenza è che ora i valori di verità $v(a)$ di un evento MV in (1) possono essere un qualunque elemento in $[0,1]$ e non necessariamente 0 o 1. Si ha allora il seguente teorema, dovuto a Mundici [46, 38]:

Teorema 4.3. *Sia* $\Phi\colon a_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, a_n \mapsto \alpha_n$ *una qualunque assegnazione di valori* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [0,1]$ *a elementi* $a_1, \ldots, a_n$ *di una MV-algebra* A. *Le seguenti sono equivalenti:*

(*i*) Φ *è coerente.*
(*ii*) *Esiste uno stato* s *di* A *che estende* Φ.
(*iii*) *Esiste una combinazione convessa di valutazioni* $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i$ *(con* $\lambda_i \geqslant 0$ *e* $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$*), che estende* Φ.

Cenni di dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) segue dal fatto che uno stato è coerente. Infatti uno stato s può essere esteso tramite linearità a un funzionale lineare, monotono e normalizzato L sullo spazio vettoriale generato da $a_1^*, \ldots, a_n^*$. Se esistessero $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tali che $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i - a_i^*(v)) > 0$ per ogni valutazione v, avremmo, per la monotonicità e la linearità di L,

$$L(\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i - a_i^*)) > 0.$$

Ma da $L(a_i) = \alpha_i$ e dalla linearità di L segue $L(\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\alpha_i - a_i^*)) = 0$, assurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) segue dal fatto che ogni combinazione convessa di valutazioni è uno stato, come si verifica facilmente.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Per assurdo, supponiamo che Φ sia coerente e che non sia combinazione convessa di valutazioni. Consideriamo l'insieme C di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ del tipo $s(a_1), \ldots, s(a_n)$, ove s è una combinazione convessa di valutazioni. Allora C è un convesso compatto, e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin C$. Per il Teorema di Hahn-Banach (si veda, ad esempio, [53]), esiste un iperpiano di equazione $\beta \cdot x - \gamma = 0$ (dove $\cdot$ indica il prodotto scalare) tale che $\beta \cdot \delta - \gamma > 0$ per ogni $\delta \in C$ e $\beta \cdot \alpha - \gamma > 0$.

Dalle due disequazioni segue che per ogni v valutazione, $\beta \cdot (v(a) - \alpha) > 0$, dove $v(a) = (v(a_1), \ldots, v(a_n))$. Pertanto se S scommette β_i su a_i, $i = 1, \ldots, n$ ottiene una vincita sicura, e B ha una perdita sicura, contro l'ipotesi che Φ sia coerente. $\square$

Gli stati sono funzionali da una MV-algebra a $[0,1]$, quindi non sono operazioni nel senso dell'algebra universale. Per poterli trattare attraverso una logica algebrizzabile, sono state introdotte le MV-algebre con stati interni, ossia le algebre (A, σ) dove A è una MV-algebra e σ un'operazione unaria su A che soddisfa le seguenti identità:

(1) $\sigma(1) = 1$,
(2) $\sigma(\neg x) = \neg\sigma(x)$,
(3) $\sigma(\neg x \oplus y) \leqslant \neg\sigma(x) \oplus \sigma(y)$,
(4) $\sigma(x \oplus (y \ominus x)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus x)$ e
(5) $\sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y)$.

Le MV-algebre con stati interni costituiscono allora una varietà, in cui sono rappresentate le principali proprietà degli stati. Tale varietà è la semantica algebrica di una logica L. Inoltre è possibile tradurre la coerenza di una assegnazione nella coerenza di un'opportuna teoria sulla logica L, [28].

Per il Teorema di Krein-Milman, gli stati sono approssimabili attraverso combinazioni convesse di stati estremali. È facile vedere che questi ultimi sono esattamente le valutazioni. Questa osservazione rende particolarmente interessante lo studio algebrico di tali stati estremali. In [20], gli autori studiano la varietà delle MV-algebre con stati interni che sono endomorfismi dell'algebra e classificano le algebre sottodirettamente irriducibili della varietà.

5. Stati e coerenza per altre logiche a più valori

Poiché esistono molte logiche a più valori oltre a quella di Łukasiewicz, è naturale chiedersi se la precedente trattazione degli eventi a più valori possa essere estesa a una qualsiasi di queste logiche. Questo paragrafo è una sorta di digressione intesa a illustrare le difficoltà che si incontrano quando si tenta di applicare l'impostazione fin qui seguita a logiche polivalenti diverse da quella di Łukasiewicz. Come caso paradigmatico parleremo della *logica di Gödel-Dummett*, a volte detta anche solo logica di Gödel, per la quale il lettore può fare riferimento a [32].

La logica di Gödel è importante, *inter alia*, perché è l'intersezione delle logiche intermedie — i sistemi che estendono la logica intuizionista — e delle logiche polivalenti nel senso di Hájek — i sistemi che estendono la logica BL. La logica di Gödel è infatti sia l'estensione di BL ottenuta richiedendo che la congiunzione monoidale sia idempotente, e dunque coincida con la congiunzione reticolare $\wedge$, sia l'estensione dell'intuizionismo ottenuta richiedendo che l'implicazione sia *prelineare*, ossia che valga $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$. Nell'ottica intuizionista, la logica di Gödel è fortemente completa rispetto ai modelli di Kripke lineari. Nell'ottica polivalente, la logica di Gödel gode di un teorema di completezza forte rispetto alle valutazioni in $[0,1]$. Ricordiamo che una *valutazione della logica di Gödel* è una funzione v dalle formule in $[0,1]$ che soddisfa le condizioni seguenti.

- $v(\alpha \wedge \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$.
- $v(\alpha \vee \beta) = \max\{v(\alpha), v(\beta)\}$.
- $v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) \leqslant v(\beta), \\ v(\beta) & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- $v(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\alpha) = 0, \\ 0 & \text{se } v(\alpha) > 0. \end{cases}$

Le *algebre di Gödel* costituiscono la controparte algebrica della logica di Gödel. Nell'ottica intuizionista, esse sono le algebre di Heyting che soddisfano l'equazione $(x \to y) \vee (y \to x) = \top$, dove $\top$ denota l'elemento massimo dell'algebra. Nell'ottica polivalente, esse sono le BL-algebre che soddisfano l'equazione $x * x = x$, dove $*$ denota l'operazione monoidale delle BL-algebre. Naturalmente, l'insieme $[0,1]$ con le operazioni usate poc'anzi per definire le valutazioni è un'algebra di Gödel. Come al solito, gli omomorfismi di algebre di Gödel con codominio $[0,1]$ sono la controparte algebrica delle valutazioni.

Non è affatto ovvio quale sia la nozione corretta di *stato* di un'algebra di Gödel. Per capire da dove nascono le difficoltà, sottolineiamo tre cruciali proprietà della logica di Łukasiewicz e delle MV-algebre.

Continuità. I connettivi dela logica di Łukasiewicz sono *tutti* semanticamente interpretati da funzioni *continue* a valori reali: non è solo la norma triangolare di Łukasiewicz (congiunzione) a essere continua; lo è anche il suo residuo (implicazione). Ora, la continuità non è certo necessaria per eseguire costruzioni importanti in probabilità, quali ad esempio la definizione del valore atteso tramite integrazione; è sufficiente la misurabilità, che è molto meno restrittiva della continuità. La continuità dei connettivi si collega però al fatto fondamentale che *la topologia euclidea di* $[0,1]$ *è indotta naturalmente dalla logica di Łukasiewicz*, come vedremo meglio oltre nel paragrafo sul *Nullstellensatz*, e da qui alla canonicità discussa al punto successivo.

Canonicità della rappresentazione reale. Abbiamo già ricordato che gli eventi MV descritti da formule della logica di Łukasiewicz si possono pensare come variabili casuali reali limitate e continue su uno spazio di Hausdorff. È un fatto molto importante, e matematicamente non banale, che tale rappresentazione sia *canonica*: non occorre fare alcuna scelta per rappresentare gli eventi MV in questo modo. Senza addentrarci nei dettagli, diciamo che ciascuna MV-algebra A ammette un omomorfismo canonico e universale $h_A\colon A \to [0,1]^V$, dove, come spiegato nel paragrafo precedente, V è la collezione degli omomorfismi (o valutazioni) $A \to [0,1]$, topologizzata come sottospazio di $[0,1]^A$. L'omomorfismo h_A è iniettivo se, e solo se, A è semi-semplice. Sebbene rappresentazioni del genere siano possibili per altre logiche polivalenti, l'aspetto canonico di questa costruzione è specifico delle MV-algebre, e ammonta all'importante *Teorema di Hölder*: una MV-algebra linearmente ordinata non banale ammette uno e un solo omomorfismo $h_A\colon A \to [0,1]$, e una MV-algebra semplice (ossia, priva di congruenze non banali) e non banale A ammette una e una sola immersione $h_A\colon A \hookrightarrow [0,1]$.

Struttura additiva. Le MV-algebre sono intrinsecamente equipaggiate con una *addizione parziale*. Se A è una MV-algebra, scriviamo $A = \Gamma(G,u)$ in forza del funtore Γ di Mundici, dove (G,u) è un gruppo abeliano reticolare con unità forte u, essenzialmente unico. Allora $x \oplus y = (x+y) \wedge u$ per ogni $x, y \in A$. Si può dimostrare che $x \oplus y = x + y$ se, e solo se, $x \odot y = 0$. Così, l'operazione parziale $+$ indotta su A da (G,u) tramite la condizione di incompatibilità $x \odot y = 0$ è una genuina addizione parziale. Si confronti la definizione 4.1. Come caso particolare, si noti che le algebre di Boole stesse, in quanto MV-algebre tali che $x \odot y = x \wedge y$, *possiedono una genuina addizione parziale*. Questa addizione ha un ruolo fondamentale nella teoria classica delle probabilità: l'idea che eventi classici incompatibili $(x \wedge y = 0)$ siano sommabili $(x \vee y = x + y)$ è già centrale, per esempio, nelle *Leggi del Pensiero* di G. Boole.

Nulla di quanto sopra vale per le altre logiche polivalenti. Raffrontiamo le proprietà appena esaminate alle caratteristiche corrispondenti della logica di Gödel. A questo scopo, consideriamo la logica di Gödel ristretta a n variabili proposizionali, dove $n \geqslant 1$ è un intero. Ciascuna formula α in n variabili induce una funzione $\alpha^*\colon [0,1]^n \to [0,1]$ tramite valutazione in $[0,1]$, esattamente come in (2) per la logica di Łukasiewicz. L'insieme

$$\mathscr{G}_n := \{\alpha^* \mid \alpha \text{ è una formula in } n \text{ variabili}\}$$

è allora un'algebra di Gödel con operazioni definite punto a punto, grazie al fatto che $[0,1]$ è un'algebra di Gödel. Il teorema di completezza garantisce adesso che se α e β non sono logicamente equivalenti, dovrà aversi $\alpha^* \neq \beta^*$. In altri termini, l'associazione $\alpha \mapsto \alpha^*$ è iniettiva a meno di equivalenza logica. Questo fatto si può riformulare, in forza di principi generali dell'algebra, nell'affermazione che $\mathscr{G}_n$ *è l'algebra di Gödel liberamente generata da* n *generatori*, ovvero l'algebra di Lindenbaum della logica di Gödel ristretta a n variabili proposizionali.

Quali funzioni $[0,1]^n \to [0,1]$ giacciono in $\mathscr{G}_n$ ossia, sono della forma α^* per qualche formula α su n variabili? Nel caso classico, la risposta all'analoga domanda è: tutte le funzioni booleane di n variabili. Nel caso della logica di Łukasiewicz, la risposta è fornita dal noto Teorema di McNaughton, di cui avremo modo di parlare più avanti (cfr. il lemma 7.17). Per la logica di Gödel, tali "funzioni gödeliane" sono state caratterizzate in [31]; si veda anche [1] per successive ricerche correlate. Ciò porta a una definizione intrinseca di $\mathscr{G}_n$, che non riporteremo qui per esteso. Sottolineiamo però che, come nel caso classico, ma a differenza di quanto avviene per la logica di Łukasiewicz, $\mathscr{G}_n$ *è un insieme finito.* E questo ammonta al fatto che la varietà delle algebre di Gödel è *localmente finita*: ogni algebra di Gödel finitamente generata è finita.

Assenza di continuità. Nella logica di Gödel, l'implicazione ha un'interpretazione semantica discontinua, come si vede dalla definizione ricordata sopra. Come immediata conseguenza si ha che $\mathscr{G}_n$ contiene funzioni che non sono continue rispetto all'usuale topologia euclidea. (Va aggiunto però che le funzioni gödeliane hanno discontinuità non patologiche, in particolare sono misurabili come funzioni reali.)

Assenza di canonicità della rappresentazione reale. Consideriamo una specifica algebra di Gödel linearmente ordinata, $L := [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Si vede agevolmente che *esistono infinite rappresentazioni isomorfe distinte di L in* $[0,1]$ *tramite un'immersione* $L \hookrightarrow [0,1]$. Si confronti con l'unicità data dal Teorema di Hölder nel caso delle MV-algebre. Il fatto è che per logiche polivalenti diverse da quella di Łukasiewicz, le rappresentazioni funzionali *canoniche* — che pure sono ben comprese, in casi importanti — non conducono a funzioni a valori reali su uno spazio di Hausdorff, bensì a funzioni che sono sì *continue*, ma definite su uno spazio che non è più di Hausdorff, e a valori che non sono più reali. Per esempio, lo spazio base per la rappresentazione canonica di un'algebra di Gödel è il suo *duale di Esakia-Priestley*, che può essere equivalentemente visto o come uno spazio spettrale, oppure come uno spazio booleano ordinato, ma in nessun caso come un mero spazio di Hausdorff. Non approfondiremo l'argomento: il lettore interessato può consultare [17, 5] e le bibliografie ivi contenute.

Assenza di una struttura additiva. L'algebra di Gödel $[0,1]$ ha ben poco a che vedere con la somma di numeri reali. Rimane vero in $\mathscr{G}_n$, naturalmente, che se $f \wedge g = 0$ allora $f \vee g = f + g$, dove $+$ denota l'operazione di somma punto a punto. Tuttavia, questa condizione è molto più debole della condizione (2) nella definizione 4.1. In particolare, non è noto alcun modo utile di completare un'algebra di Gödel a un gruppo abeliano, come avviene invece per le MV-algebre.

Chiariti questi punti di fondo, vediamo una prima possibilità per definire gli stati delle algebre di Gödel, ovvero le *assegnazioni di probabilità*[2] a tali algebre. Consideriamo una funzione $s\colon G \to [0,1]$, dove G è un'algebra di Gödel. Le condizioni di normalizzazione $s(\bot) = 0$ e $s(\top) = 1$ per il minimo e il massimo dell'algebra, rispettivamente, non sono problematiche. Per quanto riguarda l'additività, possiamo

[2]Il termine "stato" è mutuato dalla teoria delle algebre di operatori della meccanica quantistica, con le quali le MV-algebre hanno una stretta relazione (si veda per esempio [44]). Le algebre di Gödel non hanno alcuna tale relazione, e pare dunque preferibile adottare la terminologia più descrittiva"assegnazione di probabilità".

ricorrere alla nozione di *valutazione di un reticolo distributivo.*[3] Se D è un reticolo distributivo, una *valutazione* di D è una funzione $v\colon D \to \mathbb{R}$ che soddisfa

$$v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y)$$

per ogni $x, y \in D$. Le valutazioni sono generalizzazioni delle misure finitamente additive sulle algebre di Boole; si veda [51]. Le algebre di Gödel sono, in particolare, reticoli distributivi. Nel contesto delle probabilità la monotonia è inoltre intuitivamente desiderabile. Si arriva così alla:

Definizione 5.1 ([3])**.** Sia G un'algebra di Gödel. Una funzione $s\colon G \to [0,1]$ è un'*assegnazione di probabilità* se soddisfa le condizioni seguenti.

(P1) $s(\bot) = 0$, $s(\top) = 1$. (*Normalizzazione.*)
(P2) Se $x \leqslant y$ allora $s(x) \leqslant s(y)$. (*Monotonia.*)
(P3) $s(x) + s(y) = s(x \vee y) + s(x \wedge y)$ (*Proprietà di valutazione.*)

Questa definizione incorpora una serie di analogie e generalizzazioni del caso classico; per giustificarla, in tutto o in parte, sono necessari dei teoremi. Vi sono due risultati classici cui possiamo ispirarci: il Teorema di de Finetti e il Teorema di Rappresentazione di Riesz, che nel caso MV-algebrico diventano rispettivamente i teoremi 4.3 e 4.2. Cominciamo dal primo.

Il gioco di de Finetti fra S (lo scommettitore) e B (l'allibratore) può essere replicato senza modifiche per eventi gödeliani ossia descritti dalla logica di Gödel. Tuttavia, risulta necessario modificare la condizione di coerenza.

Definizione 5.2. Data un'algebra di Gödel G e un insieme finito di suoi elementi $a_1, \ldots, a_n$, un'assegnazione a valori in $[0,1]$ data da $a_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, a_n \mapsto \alpha_n$ è detta *coerente* se non esiste un sistema di scommesse di S che determina una perdita sicura *uniforme* per B, ossia se non esistono numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $\xi > 0$ tali che per ogni valutazione (=omomorfismo) $v\colon G \to [0,1]$ si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\alpha_i - v(a_i)) \leqslant -\xi < 0.$$

La condizione di uniformità è ridondante nel caso di eventi classici e in quello di eventi MV, *a causa della continuità dei connettivi.* Nel caso di eventi gödeliani, invece, le condizioni sul payoff $\leqslant -\xi$ e < 0 non sono equivalenti, neanche per un numero finito di eventi come nel caso in esame. Non ci addentriamo qui nei dettagli,[4] e rimandiamo a [3] per approfondimenti. Si ha adesso:

Teorema 5.3 ([3])**.** *Un funzione $\beta\colon \mathscr{G}_n \to [0,1]$ è coerente nel senso della definizione 5.2 se, e solo se, è un'assegnazione di probabilità nel senso della definizione 5.1.*

---

[3]Questa terminologia è invalsa, e non è il caso di cambiarla: ma occorre fare attenzione a non confondere la presente nozione di valutazione (reticolare) con quella finora usata di valutazione (logica).

[4]Facciamo però notare *en passant* che il teorema di de Finetti in [18], che nella sua più ampia generalità tratta di variabili casuali reali non necessariamente limitate, richiede esattamente la stessa condizione di uniformità necessaria anche nel caso della logica di Gödel. Ciò avviene perché (i) una variabile casuale (anche limitata) può ben avere come immagine un sottoinsieme non chiuso dei reali; (ii) la condizioni *uniforme* di coerenza equivale geometricamente a passare alla *chiusura* del guscio convesso dell'immagine della variabile casuale; e infine (iii) tale chiusura è proprio quanto gli assiomi delle probabilità finitamente additive assiomatizzano.

Occupiamoci adesso di possibili versioni gödeliane del teorema 4.2. Fissiamo una misura di Borel[5] μ su $[0,1]^n$. Data una formula α della logica di Gödel su n variabili, consideriamo la funzione indotta $\alpha^*\colon [0,1] \to [0,1]$. Tale funzione può essere integrata rispetto alla misura μ. Possiamo porre:

$$s_\mu(\alpha^*) := \int_{[0,1]^n} \alpha^* \, \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

La (4) è l'analogo per la logica di Gödel della (3). Al variare di α, ciò definisce una funzione

$$s_\mu \colon \mathscr{G}_n \to [0,1]. \tag{5}$$

Non è difficile verificare che *la funzione* s_μ *soddisfa gli assiomi* (P1–P3) *della definizione 5.1*, per qualunque scelta di μ. Un teorema nello stile di Riesz per la logica di Gödel invertirebbe adesso la corrispondenza

$$\mu \mapsto s_\mu \tag{6}$$

in modo da ottenere una biezione fra i funzionali $s\colon \mathscr{G}_n \to [0,1]$ che soddisfano (P1–P3) e le misure di Borel μ su $[0,1]^n$. Vedremo però subito che *la corrispondenza* (6) *non è né iniettiva né suriettiva.*

Da una lato, infatti, è facile costruire esempi di misure $\mu \neq \nu$ su $[0,1]^n$ tali che $s_\mu = s_\nu$. Ciò dipende dal fatto che, come abbiamo già ricordato, $\mathscr{G}_n$ è un insieme finito. Bisogna quindi imporre un'opportuna relazione di equivalenza sull'insieme di tutte le misure di Borel su $[0,1]^n$ se si vuole recuperare una biezione nello stile di Riesz per la logica di Gödel: la corrispondenza (6) non è iniettiva.

D'altro canto, vi è una seconda e più fondamentale difficoltà. Risulta che *esiste una funzione* $s\colon \mathscr{G}_n \to [0,1]$ *che soddisfa gli assiomi* (P1–P3)*, ma che non è della forma* s_μ *per nessuna scelta della misura di Borel* μ *su* $[0,1]^n$: la corrispondenza (6) non è neppure suriettiva. Dunque, gli assiomi (P1–P3) *non* sono sufficienti per dimostrare un teorema alla Riesz.

Ci limiteremo qui a commentare la seconda difficoltà, che risulta essere quella concettualmente più importante. Il fatto è che tutti i funzionali $s\colon \mathscr{G}_n \to [0,1]$ indotti per integrazione da una misura di Borel soddisfano il seguente assioma aggiuntivo, oltre a (P1–P3):

(P4) Se $x \leqslant y$ e $s(y) \leqslant s(x)$, allora $s(y \to x) = 1$. (*Assioma caratteristico.*)

L'assioma (P4) è stato identificato per la prima volta — in un'equivalente forma algebrica — nel lavoro [4]. L'assioma lega le misure di probabilità finitamente additive al connettivo di implicazione. È un esercizio verificare che nel caso classico delle algebre di Boole, e nel caso più generale degli stati MV-algebrici, l'assioma è automaticamente verificato, nel senso che esso segue dagli assiomi degli stati. Come abbiamo appena detto, però, nel caso delle algebre di Gödel (P4) non segue da (P1–P3). Diviene quindi necessario postulare l'assioma esplicitamente. Il motivo per cui l'assioma è desiderabile è che esso permette di recuperare una versione del fondamentale teorema di Riesz che vale nel caso classico: si può infatti dimostrare che *se un funzionale* $s\colon \mathscr{G}_n \to [0,1]^n$ *soddisfa* (P1–P4)*, esiste una misura di Borel* μ *su* $[0,1]^n$ *tale che* $s = s_\mu$. Una seconda considerazione generale sull'importanza di (P4) è che se ci limitassimo a (P1–P3), la nozione di assegnazione di probabilità

[5] Le misure di Borel su spazi metrizzabili, come $[0,1]^n$ per $n \leqslant \aleph_0$, sono automaticamente regolari.

a un'algebra di Gödel si applicherebbe ugualmente a una qualunque reticolo distributivo, il che indica che la teoria risultante non sarebbe specificamente connessa alla logica di Gödel. È in questo senso che (P4) può essere considerato l'assioma *caratteristico* delle probabilità per la logica di Gödel.

Naturalmente, una volta accettato il ruolo fondamentale di (P4), è necessario rivedere il teorema 5.3 di de Finetti per la logica di Gödel per renderlo compatibile con l'assioma aggiuntivo. Ciò è oggetto di ricerche in corso, e non approfondiremo oltre l'argomento. Per altre ricerche strettamente correlate, si veda anche [2]. Per una discussione sui molteplici aspetti fondazionali legati alla generalizzazione della probabilità a logiche polivalenti, e in particolare alla logica di Gödel, si veda [40].

Il breve excursus sulla logica di Gödel-Dummett che abbiamo intrapreso in questa sezione dovrebbe essere sufficiente a illustrare il principio generale che l'estensione della teoria delle probabilità a logiche non classiche coinvolge problemi non banali. Torneremo adesso a occuparci soprattutto di MV-algebre.

6. Probabilità imprecise

Secondo alcune impostazioni, nel calcolo delle probabilità ci sono (almeno) due tipi di incertezza: l'incertezza sull'esito di un esperimento e l'incertezza sulla distribuzione di probabilità. Ad esempio, se ci sono delle buone ragioni per credere che un dado sia equilibrato, pur non conoscendo l'esito del lancio, si è orientati ad accettare una scommessa sull'esito del lancio (1, 2, 3, 4, 5 o 6) se la posta da pagare in cambio della posta unitaria è minore di $\frac{1}{6}$. Supponiamo però che si venga a sapere che il dado è truccato, ma non in che modo. A priori le possibilità sono le stesse, nel senso che un numero potrebbe avere probabilità minore di $\frac{1}{6}$ ma anche maggiore di $\frac{1}{6}$. Tuttavia, se qualcuno dicesse che il valore minimo delle probabilità dei 6 numeri è $\frac{1}{10}$ e il valore massimo è $\frac{1}{4}$, si sarebbe disposti a scommettere su un qualunque numero se la quota richiesta fosse $< \frac{1}{10}$, mentre per una quota $> \frac{1}{4}$ si sarebbe disposti ad accettare qualunque scommessa come allibratore. Per valori nell'intervallo $[\frac{1}{10}, \frac{1}{4}]$, molti preferirebbero non scommettere.

Le probabilità imprecise modellano meglio di quelle precise il comportamento degli allibratore reali. Questi ultimi non accetteranno mai lo scambio di ruoli con lo scommettitore, al contrario proporranno quote teoricamente svantaggiose per lo scommettitore e vantaggiose per loro. Ad esempio, nel caso di una partita di calcio, la somma delle quote previste per 1, X e 2 sarà di regola superiore a 1. Se lo scommettitore potesse invertire i ruoli, vi sarebbe una perdita sicura per l'allibratore, ma abbiamo già detto che nella realtà lo scambio dei ruoli è impossibile. Abbiamo quindi un nuovo modello di scommesse, in cui i ruoli non possono essere scambiati (scommesse *irreversibili*).

Questo comporta che assegnazioni che sarebbero non coerenti nel caso di scommesse reversibili, diventano coerenti nel caso di scommesse irreversibili. Un esempio nel caso di una partita di calcio, è l'assegnazione $1 \mapsto \frac{1}{2}$, $X \mapsto \frac{1}{2}$, $2 \mapsto \frac{1}{3}$. Se fossero ammesse scommesse negative, scommettere -1 su ciascuno dei tre eventi comporterebbe una perdita certa per l'allibratore, mentre questa situazione non si verifica se sono consentite solo scommesse positive. Dobbiamo quindi indebolire il concetto di coerenza.

Ovviamente, evitare perdite certe sarà una condizione necessaria, ma in generale non una condizione sufficiente. Consideriamo ad esempio l'assegnazione $a \mapsto \frac{1}{4}$, $b \mapsto \frac{1}{4}$, $a \vee b \mapsto \frac{3}{4}$ in cui è possibile che a e b siano entrambe false. E' chiaro che se nessuno dei due eventi si verifica, B non perde nulla, e quindi l'assegnamento evita una perdita sicura per lui. Tuttavia, l'assegnamento non è razionale, in quanto:

1. Piuttosto che scommettere su $a \vee b$, allo scommettitore conviene scommettere la stessa quota separatamente su a e su b, pagando di meno e ottenendo la stessa quota qualunque sia l'esito.
2. All'allibratore converrebbe abbassare la quota di $a \vee b$ a $\frac{1}{2}$. In questo modo, renderebbe più attraente la sua assegnazione, e attirerebbe più scommettitori; inoltre se tutti scommettessero in modo razionale (vale a dire, puntando separatamente su a e su b invece che su $a \vee b$), il payoff dell'allibratore rimarrebbe inalterato.

Definizione 6.1 ([24])**.** Una *cattiva scommessa* corrispondente all'assegnazione $a_1 \mapsto \alpha_1, \dots, a_n \mapsto \alpha_n$, nel caso di scommesse non reversibili, è una scommessa λ su uno degli a_i tale che esiste un sistema di scommesse $a_1 \mapsto \lambda_1, \dots, a_n \mapsto \lambda_n$ che garantisce un payoff migliore a S, qualunque sia la valutazione. Un'assegnazione $a_1 \mapsto \alpha_1, \dots, a_n \mapsto \alpha_n$ nel caso di scommesse irreversibili si dice *ammissibile* se evita tutte le scommesse cattive.

Osservazione 6.2. Walley [54] utilizza una condizione sostanzialmente equivalente, ma la sua impostazione è formalmente diversa e il riferimento alle scommesse è meno esplicito.

Ricordiamo ora che per gli eventi della logica di Łukasiewicz si hanno le seguenti proprietà:

1. Sia V l'insieme delle valutazioni sulla MV-algebra A e sia per ogni $a \in A$, $a^*\colon V \mapsto [0,1]$ definita come in (2). Ogni a^* risulta continua su V.
2. Se A è semi-semplice, può essere rappresentata come sottalgebra dell'algebra $C(V,[0,1])$ delle funzioni continue da V a $[0,1]$. Ogni stato su A ha un'unica estensione a uno stato su $C(V,[0,1])$. Sull'insieme $S(A)$ degli stati, definiamo la topologia debole* come la minima topologia per cui per ogni $f \in C(V,[0,1])$, la funzione $f^*(F) = F(f)$ $(F \in S(A))$, risulta continua.

Le assegnazioni stabilite da allibratori non reversibili non corrispondono però agli stati, come nel caso reversibile, bensì all'estremo superiore di un insieme convesso e chiuso di stati (nella topologia debole*). Dato un insieme convesso e chiuso Σ di stati poniamo, per ogni $f \in C(X,[0,1])$, $u_\Sigma(f) = \sup\{s(f)\colon s \in \Sigma\}$. Allora u_Σ soddisfa le seguenti leggi (vedi [24, 54]):

1. $x \leqslant y$ implica $u_\Sigma(x) \leqslant u_\Sigma(y)$.
2. $u_\Sigma(f+q) = u_\Sigma(f) + q$, ove q è una costante tale che $f(x) + q \in [0,1]$ per ogni x.
3. $u_\Sigma(\lambda f) = \lambda u_\Sigma(f)$, per ogni $\lambda \in [0,1]$
4. $u_\Sigma(f+g) \leqslant u_\Sigma(f) + u_\Sigma(g)$.

Definizione 6.3. Un funzionale da $C(X,[0,1])$ a $[0,1]$ che soddisfa le proprietà (1–4) qui sopra è detto una *probabilità superiore*.

Teorema 6.4 ([54], si veda anche [24])**.**

1. *Se u è una probabilità superiore, l'insieme degli stati s tali che $s(f) \leqslant u(f)$ per ogni $f \in C(X,[0,1])$ forma un insieme chiuso e convesso nella topologia debole*.*
2. *Viceversa il sup di un insieme convesso e chiuso di stati è una probabilità superiore.*

Il terzo anello della catena è costituito dalla ammissibilità (non esistenza di cattive scommesse).

Teorema 6.5 ([24, 54]). *Sia* $\Pi\colon a_1 \mapsto \alpha_1, \dots, a_n \mapsto \alpha_n$ *una assegnazione su una MV-algebra. Le seguenti sono equivalenti:*

(i) Π *può essere esteso a una probabilità superiore.*
(ii) Π *evita cattive scommesse.*
(iii) *Esiste un insieme chiuso e convesso* Σ *di stati tale che per* $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i = \sup\{s(a_i) \mid s \in \Sigma\}$.

7. Dualità, Nullstellensätze ed MV-algebre

Il lettore avrà notato come nelle precedenti sezioni si sia spesso passati da una struttura matematica A allo spazio delle funzioni da A in $\mathbb{R}$, tale passaggio è un caso particolare di un fenomeno pervasivo in matematica: le *dualità*. Un punto chiave per capire il fenomeno in questo frangente è notare dall'equazione (2) la doppia natura delle valutazioni. Da un lato esse sono omomorfismi da un'algebra A verso $[0,1]$ e agiscono quindi su elementi di A; dall'altro esse possono essere viste come punti dello spazio $[0,1]^A$ su cui gli elementi di A agiscono. In questa sezione svilupperemo questo aspetto, portando avanti un parallelo con la prassi comune in geometria algebrica di associare spazi geometrici a strutture algebriche, e viceversa. Vedremo come questa linea di ricerca porti alla caratterizzazione della categoria duale alle MV-algebre semi-semplici.

La geometria algebrica classica studia le soluzioni di sistemi di equazioni polinomiali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso k. Se ciascun polinomio ha al più n variabili, diciamo $X_1, \dots, X_n$, i polinomi sono elementi dell'anello $k[X_1, \dots, X_n]$ e le soluzioni sono elementi (punti) dello *spazio affine n-dimensionale* k^n. Più in dettaglio, se $E \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ è un sottoinsieme qualunque, rimane definito il sistema di equazioni

$$p(X_1, \dots, X_n) = 0, \ p \in E. \tag{7}$$

Scriviamo $\mathbb{V}(E)$ per l'insieme di soluzioni del sistema (7). L'insieme $\mathbb{V}(E) \subseteq k^n$ è detto la *varietà affine* definita dal sistema di equazioni (7). Naturalmente, sistemi di equazioni diversi possono definire la medesima varietà affine: può ben essere che $E \neq E' \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ e tuttavia $\mathbb{V}(E) = \mathbb{V}(E')$. Per esempio, il celebre Teorema della Base di David Hilbert implica che comunque sia scelto E, esiste sempre un insieme *finito* $F \subseteq k^n$ tale che $\mathbb{V}(E) = \mathbb{V}(F)$. Una varietà affine $V \subseteq k^n$ è sempre accompagnata dal suo *anello delle coordinate*, cioè il quoziente di $k[X_1, \dots, X_n]$ per l'ideale generato dai polinomi che definiscono V.

La costruzione che associa a E la varietà affine $\mathbb{V}(E)$ può essere invertita. Un *insieme affine* è semplicemente un sottoinsieme di k^n. Dato un qualunque insieme affine $S \subseteq k^n$, scriviamo $\mathbb{C}\,(S)$ per l'insieme dei polinomi in $k[X_1, \dots, X_n]$ che si annullano su S; cioè, $p(X_1, \dots . X_n) \in \mathbb{C}\,(S)$ se, e solo se, $p(a_1, \dots, a_n) = 0$ per ogni $a_1, \dots, a_n \in S$. Risulta allora che $\mathbb{C}\,(S)$ è un ideale di $k[X_1, \dots, X_n]$. Per ciascun n fissato, gli operatori $\mathbb{V}$ e $\mathbb{C}$ definiscono allora una connessione di Galois (controvariante) tra i sottoinsiemi di k^n e quelli di $k[X_1, \dots, X_n]$ che porta un sottoinsieme $E \subseteq k[X_1, \dots, k_n]$ nell'insieme affine (invero, la varietà affine) $\mathbb{V}(E) \subseteq k^n$ degli zeri comuni ai polinomi in E e, viceversa, porta un insieme affine $S \subseteq k^n$ nell'insieme (invero, l'ideale) $\mathbb{C}\,(S)$ di polinomi in $k[X_1, \dots, X_n]$ che si annullano su S.

Gli insiemi affini di k^n che sono fissati da questa connessione di Galois — gli insiemi S, cioè, che soddisfano $\mathbb{V}(\mathbb{C}(S)) = S$ — sono, banalmente, le varietà affini. Gli ideali di $k[X_1, \ldots, X_n]$ fissati dalla connessione di Galois — gli ideali I, cioè, che soddisfano $\mathbb{C}(\mathbb{V}(I)) = I$ — sono precisamente gli *ideali radicali* di $k[X_1, \ldots, k_n]$, ossia gli ideali che coincidono con l'intersezione di tutti gli ideali primi che li contengono. Questa caratterizzazione degli ideali fissati è il contenuto del *Nullstellensatz* di Hilbert. Dal punto di vista geometrico il teorema è di importanza fondamentale perché caratterizza gli anelli delle coordinate delle varietà affini: $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ è un tale anello se, e solo se, I è radicale. Segue allora da argomentazioni elementari che gli anelli delle coordinate sono esattamente le k-algebre finitamente generate *ridotte*, ossia prive di elementi nilpotenti diversi da zero.

La classica connessione di Galois appena descritta può essere resa funtoriale. Ciò conduce a un'aggiunzione controvariante tra la categoria degli insiemi affini con mappe polinomiali e la categoria delle k-algebre finitamente generate con i loro omomorfismi.

Osservazione 7.1. Si noti che ogni coppia di funtori aggiunti $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ induce un'equivalenza tra le sottocategorie piene dei punti fissi delle composizioni $\mathscr{F} \circ \mathscr{G}$ e $\mathscr{G} \circ \mathscr{F}$. Applicando quest'osservazione all'aggiunzione di cui sopra si ottiene, attraverso il *Nullstellensatz*, la dualità standard tra la categoria delle k-algebre finitamente generate e ridotte e la categoria delle varietà affini su k.

Storicamente, l'aggiunzione fra insiemi affini e sistemi di equazioni polinomiali (sottoinsiemi di $k[X_1, \ldots, X_n]$) è motivata da considerazioni geometriche. Di primo acchito potrà forse quindi sorprendere il fatto che *quanto detto finora in questa sezione ha una naturale generalizzazione a una qualsiasi classe di algebre equazionalmente definibile* $\mathtt{V}$, cioè a una *varietà* $\mathtt{V}$ *di algebre* nel senso dell'algebra universale. Per far ciò è sufficiente:

1. fissare una varietà arbitraria $\mathtt{V}$;
2. sostituire il campo k con una $\mathtt{V}$-algebra A fissata ma arbitraria;
3. sostituire l'anello di polinomi su k con le algebre libere in $\mathtt{V}$ generate da una famiglia di variabili X (di cardinalità finita o infinita);
4. sostituire lo spazio affine k^X con la potenza diretta A^X;
5. sostituire gli ideali di $k[X]$ con le congruenze delle algebre libere nella varietà $\mathtt{V}$;
6. sostituire gli insiemi affini con gli insiemi A-*affini*, cioè i sottoinsiemi di A^X;
7. sostituire le mappe polinomiali con mappe definibili da termini nel linguaggio di $\mathtt{V}$, ovvero, con riferimento alla (2), mappe del tipo t^*, per t che varia tra gli elementi delle algebre libere.

Notazione 7.2. Nel seguito scriveremo μ per un cardinale qualsiasi e $\mathscr{F}_{\mathtt{V}}(\mu)$ per la $\mathtt{V}$-algebra liberamente generata da μ generatori.

A seguito della generalizzazione introdotta, gli operatori $\mathbb{V}$ e $\mathbb{C}$ prendono la seguente forma: per $\theta \subseteq \big(\mathscr{F}_{\mathtt{V}}(\mu)\big)^2$,

$$\mathbb{V}(\theta) := \{a \in A^\mu \mid p(a) = q(a) \text{ in } A \quad \forall (p,q) \in \theta\} \tag{8}$$

e per $S \subseteq A^\mu$,

$$\mathbb{C}(S) := \{(p,q) \in (\mathscr{F}_{\mathtt{V}}(\mu))^2 \mid p(a) = q(a) \text{ in } A \quad \forall a \in S\}. \tag{9}$$

Osservazione 7.3. Si noti che per qualsiasi classe equazionale $\mathtt{V}$ e per qualsiasi scelta di A in $\mathtt{V}$, gli operatori definiti in (8) e (9) formano una connessione di Galois, in altre parole:

$$\theta \subseteq \mathbb{C}\,(S) \qquad \text{se, e soltanto se,} \qquad S \subseteq \mathbb{V}(\theta). \tag{10}$$

Ricordando che in una classe equazionale ogni algebra è presentabile come il quoziente di una qualche algebra libera su di un'appropriata congruenza e notando che le funzioni definibili sono indotte da omomorfismi tra algebre libere, non è difficile estendere la connessione $\mathbb{V}, \mathbb{C}$ a una coppia di funtori $\mathscr{V}$ e $\mathscr{C}$ tra la categoria di tutte le $\mathtt{V}$-algebre con i loro omomorfismi e la categoria degli insiemi A-affini con mappe definibili. In forza della (10), è facile mostrare che i funtori $\mathscr{V}$ e $\mathscr{C}$ costituiscono una *coppia aggiunta* (controvariante).

Per quanto detto nell'osservazione 7.1, la coppia aggiunta $\mathscr{V}, \mathscr{C}$ si specializza a un'equivalenza (duale) di categorie tra i rispettivi punti fissi delle composizioni $\mathscr{V} \circ \mathscr{C}$ e $\mathscr{C} \circ \mathscr{V}$. Poiché l'azione dei funtori $\mathscr{V}$ e $\mathscr{C}$ sugli oggetti è essenzialmente data dagli operatori $\mathbb{V}$ e $\mathbb{C}$, diventa di particolare interesse lo studio dei punti fissi delle composizioni $\mathbb{V} \circ \mathbb{C}$ e $\mathbb{C} \circ \mathbb{V}$.

Teorema 7.4 (*Nullstellensatz* algebrico)**.** *Si fissi un cardinale μ e una congruenza θ su $\mathscr{F}\,(\mu)$. Le seguenti sono equivalenti.*

(*i*) $\mathbb{C}\,(\mathbb{V}(\theta)) = \theta$.

(*ii*) $\theta = \bigcap_{a \in \mathbb{V}(\theta)} \mathbb{C}(\{a\})$.

(*iii*) *La mappa $\sigma_\theta \colon \mathscr{F}\,(\mu)/\theta \to \prod_{a \in \mathbb{V}(\theta)} \frac{\mathscr{F}\,(\mu)}{\mathbb{C}\,(\{a\})}$ che associa ad una classe di equivalenza $[p(X)]$ in $\mathscr{F}\,(\mu)/\theta$ l'elemento del prodotto $\big([p(a)] \mid a \in \mathbb{V}(\theta)\big)$ è un'immersione sottodiretta.*

L'equivalenza tra (*i*) e (*ii*) nel teorema precedente fornisce una forma astratta del *Nullstellensatz* di Hilbert, caratterizzando le congruenze fissate dalla composizione $\mathbb{C} \circ \mathbb{V}$. Continuando il paragone fatto con la geometria, potremmo chiamare tali congruenze A-*radicali*; le $\mathtt{V}$-algebre $\mathscr{F}\,(\mu)/\theta$ per tali θ sono le $\mathtt{V}$-*algebre di coordinate* degli insiemi A-affini $\mathbb{V}(\theta)$.

L'equivalenza tra (*i*) e (*iii*) è invece un risultato dal sapore simile al classico Teorema di Rappresentazione Sottodiretta di Birkhoff. Vi sono però importanti differenze da sottolineare. Il teorema di Birkhoff, infatti, garantisce che una qualsiasi algebra in una varietà sia prodotto sottodiretto di algebre sottodirettamente irriducibili. Lo stesso Birkhoff in [11] sottolinea che l'ipotesi che la varietà sia *finitaria*[6] è cruciale nella dimostrazione (si veda infatti [6] per un controesempio). D'altro canto l'equivalenza tra (*i*) e (*iii*) qui sopra vale anche per varietà infinitarie, ma garantisce una rappresentazione sottodiretta solo per algebre presentate da una congruenza fissata e utilizza come algebre "irriducibili" quelle della forma $\frac{\mathscr{F}\,(\mu)}{\mathbb{C}\,(\{a\})}$ per qualche $a \in A^\mu$.

Alla luce delle equivalenze nel *Nullstellensatz* algebrico, l'attenzione si sposta sulle congruenze della forma $\mathbb{C}\,(\{a\})$ per $a \in A^\mu$. Il seguente teorema le caratterizza in base alle algebre che esse presentano.

Teorema 7.5 ([13])**.** *Si fissi un cardinale μ e una congruenza θ su $\mathscr{F}\,(\mu)$. Le seguenti sono equivalenti.*

(*i*) $\theta = \mathbb{C}\,(\{a\})$ *per qualche* $a \in A^\mu$.

[6]Ossia una varietà in cui ciascuna operazione abbia arietà finita.

(ii) $\mathscr{F}(\mu)/\theta$ *si immerge in* A.

I teoremi 7.4 e 7.5 sono dimostrati, in versioni ancora più generali, in [13] dove l'aggiunzione qui presentata è descritta in un ambito categoriale più astratto. Considerata soddisfacente — ne vedremo più avanti un suo uso — la caratterizzazione fornita insieme dai teoremi 7.4 e 7.5 dei punti fissi della composizione $\mathbb{C}\circ\mathbb{V}$, volgiamo la nostra attenzione alla composizione inversa.

La composizione $\mathbb{V}\circ\mathbb{C}$ opera sugli insiemi A-affini e i suoi punti fissi sono ciò che potremmo chiamare *varietà A-affini.* In geometria algebrica, le varietà affini sono esattamente i chiusi della *topologia di Zariski* su A^n. Ricordiamo che all'inizio di questa sezione abbiamo deciso di sostituire le funzioni polinomiali con funzioni definibili da termini nelle algebre libere e che il luogo dei punti su cui queste funzioni si annullano è stato sostituito con con quello su cui due funzioni definibili si eguagliano. Arriviamo così a una nozione generalizzata di topologia di Zariski in cui i chiusi sono della forma $V_F := \{a \in A^\mu \mid f(a) = g(a) \quad \forall f, g \in F\}$ con F famiglia di coppie di funzioni definibili da A^μ in A. Ma tali funzioni definibili corrispondono alle valutazioni dei polinomi su A, dunque i chiusi di Zariski altro non sono che gli insiemi della forma $\mathbb{V}(\theta)$ per $\theta \subseteq \left(\mathscr{F}_{\mathtt{V}}(\mu)\right)^2$ ed è immediato notare che tali insiemi sono esattamente i punti fissi della composizione $\mathbb{V}\circ\mathbb{C}$. In conclusione:

> *Caratterizzare i punti fissi della composizione* $\mathbb{V}\circ\mathbb{C}$ *equivale a caratterizzare i chiusi della topologia di Zariski indotta su* A^μ *dalle funzioni definibili.*

Purtroppo non ci sono risultati generali riguardanti questa caratterizzazione. Ciò nonostante, vedremo tra poco che in casi particolari è possibile dare una completa caratterizzazione usando argomenti ad hoc.

Prima di tornare alle MV-algebre è opportuno notare che il quadro astratto sviluppato fin qui, in quanto applicabile a una qualsiasi varietà di algebre, si collega a molti importanti teoremi di dualità. Lo spazio a nostra disposizione non permette di addentrarci nei dettagli. Ci limitiamo solo a dire che specializzazioni (spesso tutt'altro che banali) dei risultati esposti sopra consentono di riottenere, ad esempio, la dualità di Stone per le algebre di Boole, la dualità di Priestley per i reticoli distributivi, le dualità di Stone-Gel'fand-Naimark per le C*-algebre commutative o reali e la dualità di Pontryagin per i gruppi topologici compatti, oltre ovviamente alla classica dualità della geometria algebrica affine esposta all'inizio di questa sezione. Il parallelo con la geometria algebrica permette così di ricondurre molte dualità a un unico fenomeno.

Il quadro generale che abbiamo esposto non è certo il primo tentativo di unificare le molte dualità presenti in matematica, né il primo a trarre ispirazione dalla geometria algebrica. Un confronto dettagliato fra il materiale precedente e la letteratura richiederebbe molto spazio; al lettore interessato ad altri studi generali dei fenomeni di dualità segnaliamo almeno gli influenti trattati [16, 34] e, per quanto riguarda le relazioni tra dualità e geometria, gli articoli [19] e [50].

Cominciamo ora la specializzazione dei risultati appena presentati al caso che più ci interessa: le MV-algebre. Tutti i dettagli di quanto sviluppato qui di seguito possono essere trovati in [42]. La varietà $\mathtt{V}$ sarà in questo caso quella di tutte le MV-algebre, mentre scegliamo come algebra A l'MV-algebra standard su $[0,1]$. Immediatamente abbiamo:

Proposizione 7.6. *Esiste un'aggiunzione controvariante* $\mathscr{V}, \mathscr{C}$ *tra la categoria* MV *di tutte le MV-algebre con i loro omomorfismi e la categoria* D *dei sottoinsiemi A-affini su* $[0,1]$ *con le mappe definibili nel linguaggio delle MV-algebre. Il funtore* $\mathscr{V}\colon \mathsf{MV} \to \mathsf{D}$ *porta una qualsiasi MV-algebra, che senza perdere di generalità possiamo supporre isomorfa a* $\mathscr{F}(\mu)/\theta$*, nel sottoinsieme di* $[0,1]^\mu$ *dato da* $\mathbb{V}(\theta)$*. Il funtore* $\mathscr{C}\colon \mathsf{D} \to \mathsf{MV}$ *porta un sottoinsieme* S *di* $[0,1]^\mu$ *nell'MV-algebra* $\mathscr{F}(\mu)/\,\mathbb{C}(S)$*.*

Per caratterizzare i punti fissi dell'aggiunzione ricordiamo che le MV-algebre semplici non banali sono esattamente quelle che si immergono nell'MV-algebra standard $[0,1]$. Chiamando *semplice* una congruenza che presenta un'algebra semplice. Abbiamo come conseguenza immediata del teorema 7.5 che *le MV-congruenze semplici sono tutte e sole quelle che possono essere scritte nella forma* $\mathbb{C}(\{a\})$ *per qualche* $a \in A^\mu$ *e qualche cardinale* μ. Inoltre, chiamando *congruenze semi-semplici* le congruenze che presentano algebre semi-semplici[7], ricordiamo dall'algebra universale che le congruenze *semi-semplici* sono esattamente le intersezioni di congruenze semplici. Un'immediata applicazione del *Nullstellensatz* algebrico ci porta dunque ad asserire:

Lemma 7.7. *Con la notazione della proposizione 7.6, le algebre fissate dal funtore* $\mathscr{C} \circ \mathscr{V}$ *sono esattamente le MV-algebre semi-semplici.*

Rimangono a questo punto da caratterizzare le varietà A-affini del caso. Il punto chiave è notare che, a differenza del caso classico, la topologia di Zariski su $A = [0,1]$ coincide con quella euclidea. Infatti le funzioni definibili su $[0,1]$ sono continue rispetto alla topologia euclidea e questa è di Hausdorff, dunque l'insieme dei punti su cui due di queste funzioni si eguagliano è chiuso. Poiché ogni chiuso della topologia di Zariski è intersezione di tali insiemi, esso è anche un chiuso della topologia euclidea. Per l'inclusione inversa è necessario il seguente lemma tecnico la cui prova è lasciata al lettore.

Lemma 7.8. *Per ogni intervallo aperto* $(a,b) \subseteq [0,1]$ *e ogni* $p \in (a,b)$*, esiste un termine MV-algebrico* $l(x)$ *tale che la funzione definibile* $l^*\colon [0,1] \to [0,1]$ *associata a* l *(si veda* (2)*) soddisfa* $l^*(p) > 0$ *e* $(\,[0,1] \setminus (a,b)\,) \subseteq (l^*)^{-1}(0)$*.*

Se ora $C \subseteq [0,1]$ è un chiuso nella topologia euclidea e p è un punto esterno a esso, per il lemma precedente esiste una funzione definibile da un termine t che si annulla su C, ma non su p. Quindi il chiuso di Zariski $\mathbb{V}(t,0)$ contiene tutto C ma esclude p. Da ciò si ha immediatamente che la topologia euclidea è contenuta in quella di Zariski e dunque le due coincidono.

Si noti che ci sono almeno due maniere di topologizzare l'insieme $[0,1]^\mu$: usare ancora la topologia di Zariski (delle funzioni definibili su $[0,1]^\mu$) o usare la topologia prodotto indotta, equivalentemente, dalla topologia euclidea o di Zariski su $[0,1]$. Anche queste due topologie in generale in geometria algebrica non coincidono; vediamo che invece ciò avviene nel caso delle MV-algebre.

Lemma 7.9. *La topologia prodotto e la topologia di Zariski su* A^μ *coincidono per ogni cardinale* μ*.*

Dimostrazione. Un'implicazione è sempre banale, poiché la topologia prodotto è la più grezza topologia che rende continue le funzioni proiezione. Ma le proiezioni sono definibili (la proiezione sull'i-esima coordinata è rappresentata dal termine X_i) e

[7] Cioè prodotti sottodiretti di algebre semplici.

si vede facilmente che le funzioni definibili sono tutte continue nella topologia di Zariski. Ergo, la topologia prodotto è contenuta in quella di Zariski. Viceversa, ogni chiuso di Zariski è intersezione di insiemi della forma $\mathbb{V}(s,t)$ dove s e t sono termini e quindi rappresentano funzioni definibili da $[0,1]^\mu$ in $[0,1]$. Ma $[0,1]$ è di Hausdorff e le funzioni definibili sono continue rispetto alla topologia prodotto, quindi $\mathbb{V}(s,t)$ è chiuso nella topologia prodotto e la dimostrazione è conclusa. □

Riassumendo, abbiamo stabilito che i punti fissi del funtore $\mathscr{V} \circ \mathscr{C}$ sono esattamente i chiusi di $[0,1]^\mu$ con la usuale topologia prodotto. I sottospazi di $[0,1]^\mu$, al variare di μ, sono noti come gli *spazi di Tychonoff*. È noto però che la classe dei sottospazi *chiusi* di $[0,1]^\mu$, per μ arbitrario, coincide con la classe degli spazi compatti e di Hausdorff. Combinando questi risultati con la caratterizzazione dei punti fissi dal lato algebrico, otteniamo:

Teorema 7.10 ([42])**.** *La categoria delle MV-algebre semi-semplici con i loro omomorfismi è duale alla categoria i cui oggetti sono gli spazi compatti di Hausdorff, ciascuno con una fissata immersione in* $[0,1]^\mu$ *per qualche* μ*, e i cui morfismi sono le mappe MV-definibili tra gli oggetti.*

Per il resto di questa sezione sia m un numero naturale. Mostreremo ora che la coppia aggiunta $\mathscr{V},\mathscr{C}$ si restringe a un'equivalenza tra le MV-algebre finitamente presentate e i poliedri razionali. A tal fine introduciamo una sottocategoria piena dei compatti di Hausdorff immersi in $[0,1]^\mu$ con mappe MV-definibili, che mostreremo in seguito essere l'immagine tramite $\mathscr{V}$ delle MV-algebre finitamente presentate.

Definizione 7.11. Un sottoinsieme $S \subseteq [0,1]^\mu$ è detto *finitamente definibile* se esiste un insieme finito I e un insieme di coppie $R = \{(s_i,t_i) \in \mathscr{F}(\mu) \times \mathscr{F}(\mu) \mid i \in I\}$, tale che $S = \mathbb{V}(R)$. Indichiamo con $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ la categoria i cui oggetti sono sottoinsiemi finitamente definibili di $[0,1]^m$, con m che varia tra i naturali, e i cui morfismi sono le mappe MV-definibili.

Osservazione 7.12. È un esercizio [15, (1.8–1.9)] mostrare che nella teoria delle MV-algebre, dato un qualsiasi $R = \{(s_i,t_i) \in \mathscr{F}(\mu) \times \mathscr{F}(\mu) \mid i \in I\}$ con I finito, esiste un termine $s \in \mathscr{F}(\mu)$ tale che $\mathbb{V}(R) = \mathbb{V}(s,0)$. In particolare, congruenze finitamente generate e principali (cioè generate da una singola coppia di termini) coincidono.

Vediamo ora che gli insiemi finitamente definibili corrispondono esattamente tramite l'aggiunzione $\mathscr{V},\mathscr{C}$ alle MV-algebre finitamente presentate. La dimostrazione richiede risultati non banali della teoria delle MV-algebre, a cominciare dal prossimo lemma. Denotiamo con $\langle(s,t)\rangle$ la congruenza *generata* dalla coppia di termini (s,t), cioè l'intersezione di tutte le congruenze che contengono la coppia (s,t).

Lemma 7.13 ([15, 3.4.8])**.** *Siano* s,t,u,v *elementi di* $\mathscr{F}(m)$*, allora* $(u,v) \in \langle(s,t)\rangle$ *se, e soltanto se,* $\mathbb{V}(s,t) \subseteq \mathbb{V}(u,v)$*.*

Si noti che per quanto il lemma precedente possa sembrare elementare, la sua dimostrazione coinvolge argomenti geometrici, il teorema di completezza di Chang e il fatto che le funzioni definibili sono funzioni lineari a pezzi (il verso facile del lemma 7.17). In effetti, come vedremo subito, il lemma è una versione del fondamentale Teorema di Hay-Wójcicki: *ogni MV-algebra finitamente presentata è semi-semplice.*

In forza del lemma 7.13, le congruenze finitamente generate sono sempre rappresentabili nella forma $\mathbb{C}(S)$ per qualche insieme A-affine S. Difatti, l'insieme $\mathbb{C}(S)$

è sempre una congruenza e l'operatore $\mathbb{C}\circ\mathbb{V}$ è un operatore di chiusura, quindi per ogni coppia di termini (s,t), si ha $\langle(s,t)\rangle \subseteq \mathbb{C}(\mathbb{V}(\langle(s,t)\rangle)) = \mathbb{C}(\mathbb{V}(s,t))$. D'altra parte se $(u,v) \in \mathbb{C}(\mathbb{V}(s,t))$ allora per la (10) $\mathbb{V}(s,t) \subseteq \mathbb{V}(u,v)$. Ma in tal caso il lemma 7.13 implica che $(u,v) \in \langle(s,t)\rangle$ e dunque $\mathbb{C}(\mathbb{V}(s,t)) \subseteq \langle(s,t)\rangle$.

Quanto appena dimostrato equivale al Teorema di Hay-Wójcicki. Infatti se θ è una congruenza su $\mathscr{F}(m)$ che può essere scritta nella forma $\mathbb{C}(D)$, per qualche $D \subseteq [0,1]^{\mu}$, allora $\mathbb{C}(\mathbb{V}(\theta)) = \mathbb{C}(\mathbb{V}(\mathbb{C}(D))) = \mathbb{C}(D) = \theta$, il che vuol dire che θ è fissata dall'operatore $\mathbb{C}\circ\mathbb{V}$ e dunque per lemma 7.7, $\mathscr{F}(m)/\theta$ è semi-semplice. Riassumendo:

Lemma 7.14 (Teorema di Hay-Wójcicki)**.** *Se θ è una congruenza finitamente generata su $\mathscr{F}(m)$, allora esiste un insieme $D \subseteq A^m = [0,1]^m$ tale che $\theta = \mathbb{C}(D)$. Ne segue che ogni MV-algebra finitamente presentata è semi-semplice.*

Siamo ora in grado di specializzare l'aggiunzione $\mathscr{V},\mathscr{C}$ alle MV-algebre finitamente presentate.

Teorema 7.15. *L'aggiunzione $\mathscr{V},\mathscr{C}$ si restringe a una equivalenza di categorie tra le MV-algebre finitamente presentate e $\mathsf{D}^{\mathrm{op}}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$.*

Dimostrazione. Grazie al lemma 7.14 sappiamo che l'aggiunzione fissa tutte le MV-algebre finitamente presentate, poiché esse sono semi-semplici e quindi ricadono sotto il lemma 7.7. Rimane dunque da stabilire quali sono le varietà A-affini nell'immagine di $\mathscr{V}$. Se $\mathscr{F}(m)/\theta$ è finitamente presentata allora θ è finitamente generata per definizione. Segue immediatamente che $\mathscr{V}(\mathscr{F}(m)/\theta) = \mathbb{V}(\theta)$ è finitamente definibile.

Viceversa, se $D \subseteq [0,1]^m$ è finitamente definibile, allora $D = \mathbb{V}(s,t)$ per qualche coppia di termini (s,t) e dunque, per il lemma 7.14, è fissato. Ne segue che $\mathbb{C}(D) = \mathbb{C}(\mathbb{V}(\langle(s,t)\rangle)) = \langle(s,t)\rangle$. Dunque $\mathbb{C}(D)$ è finitamente generata, ergo $\mathscr{C}(D) = \mathscr{F}(m)/\mathbb{C}(D)$ è finitamente presentata. $\square$

La categoria astratta $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ ammette una caratterizzazione in termini puramente goemetrici. Ciò porta alla dualità geometrica tra le MV-algebre finitamente presentate e i poliedri razionali. Per tutti i riferimenti aggiuntivi sui poliedri si veda [52].

Una *combinazione convessa* di un insieme finito di vettori $v_1,\ldots,v_u \in \mathbb{R}^m$ è un vettore della forma $r_1v_1 + \cdots + r_uv_u$, con $r_i \geqslant 0$ numeri reali non negativi che soddisfano $\sum_{i=1}^{u} r_i = 1$. Se $S \subseteq \mathbb{R}^m$, denoteremo con $\mathtt{conv}\,S$ il *guscio convesso* di S, cioè l'insieme di tutte le combinazioni convesse di insiemi finiti di vettori $v_1,\ldots,v_u \in S$. Un *politopo* è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ della forma $\mathtt{conv}\,S$, per qualche $S \subseteq \mathbb{R}^m$ finito e un *poliedro* (*compatto*) è un'unione di un numero finito di politopi in $\mathbb{R}^m$. Un politopo è *razionale* se può essere scritto nella forma $\mathtt{conv}\,S$ per qualche insieme finito $S \subseteq \mathbb{Q}^m$ di vettori a coordinate razionali. Similmente, un poliedro è *razionale* se può essere scritto come unione finita di politopi razionali.

Definizione 7.16 (Si veda [45, Definizione 3.1])**.** Dato un poliedro razionale $P \subseteq [0,1]^m$ e una mappa continua $\zeta = (\zeta_1,...,\zeta_n) : P \to [0,1]^n$, con $n \geqslant 0$ un intero, diremo che ζ è una $\mathbb{Z}$-*mappa* se per ogni $i = 1,\ldots,n$, ζ_i è *lineare a pezzi con coefficienti interi*: in altre parole, se c'è un numero finito di polinomi lineari (affini) con coefficienti interi $l_{i,1},\ldots,l_{i,j_i} \colon [0,1]^m \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x \in P$ esiste $j \in \{1,\ldots,j_i\}$ con $\zeta_i(x) = l_{i,j}(x)$. Infine, se $Q \subseteq [0,1]^n$ è un poliedro razionale, una funzione $\zeta\colon P \to Q$ è una $\mathbb{Z}$-*mappa* se esiste una $\mathbb{Z}$-mappa $\zeta'\colon P \to [0,1]^n$ tale che ζ e ζ' sono uguali su ogni elemento del loro dominio comune P.

È un semplice esercizio mostrare che la composizione di $\mathbb{Z}$-mappe su poliedri razionali è ancora una $\mathbb{Z}$-mappa. Inoltre, le mappe identità su ogni poliedro razionale sono $\mathbb{Z}$-mappe. Quindi i poliedri razionali che giacciono in $[0,1]^m$, per qualche naturale $m \geqslant 0$ e le $\mathbb{Z}$-mappe tra di loro formano una categoria che denoteremo con $\mathsf{P}_{\mathbb{Z}}$. Il fatto chiave è che le $\mathbb{Z}$-mappe tra poliedri razionali sono precisamente le mappe MV-definibili.

Lemma 7.17 (Teorema di McNaughton per poliedri razionali)**.** *Sia $P \subseteq [0,1]^m$ un poliedro razionale e $\lambda\colon P \to [0,1]$ una qualsiasi funzione. La funzione λ è una $\mathbb{Z}$-mappa se, e soltanto se, λ è MV-definibile.*

La dimostrazione del caso $P = [0,1]^m$, noto abitualmente come Teorema di McNaughton *tout court*, si può trovare in [15, 9.1.5]. Per la generalizzazione ai poliedri razionali si veda [45, 3.2]. Per riferimenti ad altre dimostrazioni, inclusa quella originale di McNaughton, si veda [15].

Lemma 7.18. *La categoria $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ coincide con $\mathsf{P}_{\mathbb{Z}}$.*

Dimostrazione. Useremo un fatto geometrico di cruciale importanza: S è un poliedro razionale se, e soltanto se, esiste una $\mathbb{Z}$-mappa $\zeta\colon [0,1]^m \to [0,1]$ che si annulla precisamente su S, cioè $\zeta^{-1}(0) = S$; si veda ad esempio [41, Proposition 5.1]. Se $S \subseteq [0,1]^m$ è finitamente definibile, è della forma $\mathbb{V}(s,0)$, quindi S è l'insieme delle soluzioni in $[0,1]^m$ dell'equazione $s^* = 0$, dove s^* è la funzione definita da s. Per il lemma 7.17, s^* è una $\mathbb{Z}$-mappa; poiché in aggiunta $S = (s^*)^{-1}(0)$ per costruzione, abbiamo che S è un poliedro razionale. Viceversa, se S è un poliedro razionale in $[0,1]^m$, esiste una $\mathbb{Z}$-mappa $\zeta\colon [0,1]^m \to [0,1]$ tale che $\zeta^{-1}(0) = S$. Per il lemma 7.17 esiste un termine $s \in \mathscr{F}(m)$ tale che ζ è la funzione definita da s e quindi, dato che $S = \mathbb{V}(s,0)$, S è finitamente definibile. Abbiamo mostrato che $\mathsf{D}_{\mathsf{def}\,\mathbb{Z}}$ e $\mathsf{P}_{\mathbb{Z}}$ hanno gli stessi oggetti. Il fatto che esse abbiano gli stessi morfismi è un'immediata conseguenza del lemma 7.17. $\square$

Come conseguenza immediata del teorema 7.15 e del lemma 7.18, otteniamo infine:

Corollario 7.19 (Teorema di dualità per le MV-algebre finitamente presentate)**.** *La dualità $\mathscr{V}, \mathscr{C}$ del teorema 7.10 si specializza a una equivalenza di categorie tra la sottocategoria piena delle MV-algebre finitamente presentate e quella dei poliedri razionali e delle $\mathbb{Z}$-mappe.*

Per concludere questa sezione, torniamo alla classica aggiunzione fra k-algebre finitamente generate e insiemi affini da cui abbiamo preso le mosse. La nozione di varietà affine, e quella strettamente correlata di varietà proiettiva, furono centrali in geometria algebrica. Tuttavia gli sviluppi moderni della geometria algebrica, a partire dai pionieristici lavori di Grothendieck e della scuola francese degli anni cinquanta e sessanta del secolo scorso, hanno rifondato la geometria algebrica su nuove basi. Il concetto centrale diviene adesso quello di *schema*, una vasta generalizzazione delle varietà imperniata in modo essenziale alla nozione di *fascio di anelli locali.*

La generalizzazione di questi sviluppi a varietà arbitrarie di algebre secondo le linee esposte qui sopra rimane ancora da esplorare, almeno per quanto ne sappiamo.

Tuttavia, nel caso particolare delle MV-algebre che più ci interessa qui, si può già dire qualcosa in più. Si è visto in questo paragrafo che la dualità MV-algebrica costruita per generalizzazione dell'aggiunzione affine controvariante della geometria algebrica rimane essenzialmente limitata al caso semi-semplice. In analogia con gli sviluppi storici della geometria algebrica, è possibile che nuovi progressi in grado di includere anche MV-algebre non semi-semplici richiedano l'uso di fasci di MV-algebre. Di fatto, esiste già una non trascurabile letteratura che affronta con successo il problema di rappresentare una arbitraria MV-algebra come l'algebra delle sezioni locali di un fascio di MV-algebre scelte da una classe prefissata, il fascio essendo definito su un opportuno spazio base costruito a partire dall'insieme degli ideali primi [23, 35], massimali [27] o primi minimali [26] delle MV-algebre in questione. Sviluppi più recenti e applicazioni possono essere trovati in [21, 7]. Il lettore interessato può consultare la corposa bibliografia di [29], un recente lavoro nel quale si unificano le diverse rappresentazioni per fasci già note applicando alle MV-algebre la dualità di Stone-Prestley per i reticoli distributivi.

8. Ulteriori sviluppi delle dualità affini per le MV-algebre

Il quadro presentato nella sezione precedente ammette almeno due immediate generalizzazioni. È infatti possibile sostituire l'MV-algebra $[0,1]$ con una qualsiasi altra, mantenendo valida l'aggiunzione controvariante. Inoltre, i polinomi presi in considerazioni possono essere arricchiti con coefficienti presi in una qualsiasi MV-algebra (necessariamente contenuta in quella del paragrafo precedente, ma non necessariamente uguale). Entrambe queste generalizzazioni sono state studiate e sono tuttora oggetto di ricerche da parte del gruppo di Salerno [8, 9, 10].

Per quanto riguarda lo studio degli operatori $\mathbb{C}$ e $\mathbb{V}$ nel caso in cui i polinomi sono valutati su di un'arbitraria MV-algebra A, alcuni importanti importanti risultati sono esposti in [10]. Si dimostra, ad esempio, come la composizione $\mathbb{V} \circ \mathbb{C}$ induca un operatore di chiusura topologico se, e soltanto se, l'MV-algebra A è linearmente ordinata. La topologia di Zariski viene inoltre confrontata con la topologia indotta dall'ordine reticolare delle MV-algebra. In questo ambito si dimostra [10, Teorema 8] che le due topologie coincidono se, e soltanto se, l'algebra A è semplice. Infine è possibile dare una caratterizzazione dei chiusi 1-dimensionali [10, Teorema 29], sebbene i tecnicismi necessari non la rendano idonea a essere illustrata in questo frangente.

Il caso più generale di una MV-algebra arbitraria A e polinomi a coefficienti in A permette di ottenere risultati altrettanto interessanti. Va notato che in questo caso lo *zero set* di un ideale non banale può essere vuoto, tuttavia, eccezion fatta per questi ideali, è possibile provare anche in questo ambito un Nullstellesatz che assicura che gli ideali nell'aggiunzione sono esattamente quelli esprimibili come intersezione di ideali della forma $\mathbb{C}(\{a\})$ con $a \in A^\mu$ [10, Teorema 4.12]. Il teorema di Wójcicki può essere generalizzato a tutte le MV-algebre semplici e divisibili [10, Teorema 6.18]. Infine una formulazione opportuna del teorema di McNaughton vale anche in questo ambito [10, Corollario 8.5].

9. Ulteriori temi di ricerca

Un problema di primaria importanza è quello della *probabilità condizionata* in una logica a più valori. In questo campo è già stato fatto molto, e sono state

presentate varie possibilità, tutte interessanti. Per ragioni di spazio non possiamo approfondire l'argomento; il lettore interessato potrà cominciare da [47] e [43].
Un altro tema di ricerca è costituito dal concetto di *coerenza forte*. L'idea è la seguente: un'assegnazione (nel caso reversibile) potrebbe rendere possibile un sistema di scommesse che in qualche caso determina un payoff nullo e in altri casi determina una perdita, ma in nessun caso determina un guadagno per l'allibratore. In questo caso non abbiamo una perdita certa, e quindi l'assegnazione è coerente, ma questo non toglie che un'assegnazione che in qualche caso può portare a una perdita e in nessun caso porta a una vincita non sia molto razionale.

Definiamo allora *fortemente coerente* una assegnazione tale che, per ogni sistema di scommesse, se esiste una valutazione per cui il payoff dell'allibratore è negativo, ne esiste un'altra per cui tale payoff è positivo.

Come si caratterizzano le assegnazioni fortemente coerenti in termini di stati? Se l'assegnazione è definita su tutta la MV-algebra, allora è fortemente coerente se e solo se è indotta da uno stato fedele, cioè da uno stato s tale che $s(a) = 1$ implica $a = 1$. Nel caso booleano, questo fatto è stato dimostrato in [36].

Se però consideriamo assegnazioni finite, il risultato non è più vero, in quanto una MV-algebra può ammettere assegnazioni fortemente coerenti pur non avendo stati fedeli. Formuliamo però la seguente congettura:

Congettura. *Una assegnazione (finita) su una MV-algebra semi-semplice e finitamente generata è fortemente coerente se e solo se è estendibile a uno stato fedele.*

Un altro tema interessante è quello della coerenza congiunta. Innanzitutto, è interessante notare la relazione che sussiste fra il Teorema di Correttezza e Completezza per la Logica e il Teorema di de Finetti: il primo dice che un insieme di enunciati è coerente (nel senso che non dà luogo a contraddizioni) se ha un modello, mentre il secondo dice che un'assegnazione è coerente (in senso probabilistico, ma un'assegnazione che prevede una perdita certa non è certo razionale) se e solo se esiste una misura di probabilità (l'analogo probabilistico di un modello) che la soddisfa.

In Logica esiste anche un teorema di coerenza congiunta, che stabilisce delle condizioni sotto le quali l'unione di due insiemi che sono separatamente coerenti, è coerente. Il problema della coerenza congiunta di due assegnazioni potrebbe anche avere risvolti pratici. Immaginiamo due allibratori che stabiliscono due diverse assegnazioni (irreversibili): $a_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, a_n \mapsto \alpha_n$ e $b_1 \mapsto \beta_1, \ldots, b_m \mapsto \beta_m$. Possiamo aspettarci ragionevolmente che entrambe le assegnazioni evitino una perdita sicura per ciascuno dei due allibratori. Un giocatore potrebbe però combinare scommesse in parte con il primo allibratore e in parte con il secondo, e non è escluso che esista una combinazione di scommesse che gli garantisce una vincita sicura, causando una perdita certa al complesso dei due allibratori.

Consideriamo infatti il seguente esempio, nel caso di una partita di calcio: il primo allibratore accetta scommesse su 1 con quota $\frac{1}{3}$, su X, con quota $\frac{1}{3}$ e su 2 con quota $\frac{1}{2}$, mentre il secondo accetta scommesse su 2 con quota $\frac{1}{4}$ (non ci interessa qui se accetta anche scommesse su 1 e su X). Allora, uno scommettitore potrebbe scommettere sia su 1 che su X con il primo dei due allibratori e scommettere sul 2 con il secondo, ottenendo una vincita sicura. Mentre le due assegnazioni sono separatamente coerenti, la loro unione non lo è.

La coerenza congiunta di tutte le assegnazioni proposte dagli allibratori è una condizione senza la quale almeno una parte di essi rischia la rovina. (Di fatto però le quote stabilite dagli allibratori non sono stabili, anzi variano a seconda delle scommesse, per cui questo è più un problema teorico che un problema reale).

Il problema di trovare una caratterizzazione matematica della coerenza congiunta di due o più assegnazioni sembra molto interessante e, almeno nel caso in cui le assegnazioni non riguardano gli stessi eventi, potrebbe essere non banale.

Abbiamo dovuto tralasciare molti temi di interesse corrente e a molti altri abbiamo solo accennato. Ci auguriamo però che quanto esposto, pur nella sua parzialità e sommarietà, possa dare al lettore interessato qualche elemento in più per orientarsi nel panorama della ricerca sulla logica polivalente in Italia.

Riferimenti bibliografici

[1] Aguzzoli, S. e Gerla, B. Normal forms and free algebras for some extensions of MTL. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(10):1131–1152, 2008.

[2] Aguzzoli, S. e Gerla, B. Probability measures in the logic of nilpotent minimum. *Studia Logica*, 94(2):151–176, 2010.

[3] Aguzzoli S., Gerla, B. e Marra, V., De Finetti's no-Dutch-book criterion for Gödel Logic, *Studia Logica*, 90, pp. 25-41, 2008.

[4] Aguzzoli, S., Gerla, B. e Marra, V. Defuzzifying formulas in gödel logic through finitely additive measures. In *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, pp. 1886–1893. 2008.

[5] Aguzzoli, S., Gerla, B. e Marra, V. Gödel algebras free over finite distributive lattices. *Ann. Pure Appl. Logic*, 155(3):183–193, 2008.

[6] Banaschewski, B. e Nelson, E. Equational compactness in infinitary algebras. *Colloq. Math.*, 27:197–205, 1973.

[7] Belluce, L. P., Di Nola, A. e Ferraioli, A. R. MV-semirings and their sheaf representations. *Order*, 30(1):165–179, 2013.

[8] Belluce, L. P., Nola, A. D. e Lenzi, G. Algebraic geometry for MV algebras. *Submitted*, 2014.

[9] Belluce, L. P., Nola, A. D. e Lenzi, G. Geometric issues in the algebraic theory of many valued logics. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 1(4):18–24, 2014.

[10] Belluce, L. P., Nola, A. D. e Lenzi, G. On generalizing the Nullstellensatz for MV algebras. *to appear on Journal of Logic and Computation*, 2014.

[11] Birkhoff, G. Subdirect unions in universal algebra *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50:764–768, 1944.

[12] Burris, S. e Sankappanavar, H. P. *A course in universal algebra*. Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1981.

[13] Caramello, O., Marra, V. e Spada, L. General affine adjunctions, Nullstellensätze, and dualities, 2014. Manuscript.

[14] Chang, C.C. A new proof of the completeness of Lukasiewicz axioms. *Transactions of the American Mathematical Society* 93 (1989), 74-80.

[15] Cignoli, R., D'Ottaviano, I. e Mundici, D. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, Dordrecht 2000.

[16] Clark, D. M. e Davey, B. A. *Natural dualities for the working algebraist*, volume 57 di *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, xii+356 pp.

[17] D'Antona, O. M. e Marra, V. Computing coproducts of finitely presented Gödel algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, 142(1-3):202–211, 2006.

[18] de Finetti, B. *Teoria delle probabilità: sintesi introduttiva con appendice critica. Volumi primo e secondo*. Giulio Einaudi Editore, Turin, 1970, Vol. I: xiv+pp. 1–347; Vol. II: viii+pp. 348–770 pp. Nuova Biblioteca Scientifica Einaudi, 25* et 25**.

[19] Diers, Y. *Affine algebraic sets relative to an algebraic theory, Journal of Geometry* 65, 54–76, 1999.

[20] Di Nola, A. e Dvurecenskij, A. State-morphism MV-algebras. *Annalls of Pure and Applied Logic* 16(2):161–173, 2009

[21] Di Nola, A., Ferraioli, A. R. e Lenzi, G. Algebraically closed MV-algebras and their sheaf representation. *Ann. Pure Appl. Logic*, 164(3):349–355, 2013.

[22] Flaminio, T. e Montagna, F. MV-algebras with internal states and probabilistic fuzzy logics. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(1): 138–152, 2009.

[23] Dubuc, E. e Poveda, Y. Representation theory of MV-algebras. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2010.
[24] Fedel M., Keimel, K., Montagna, F. e Roth, W. D. Imprecise probabilities, bets and functional analytic methods in Lukasiewicz logic, *Forum Mathematicum*, 25, 405-441 2013.
[25] Fedel, M., Hosni, H. e Montagna F. A logical characterization of coherence for imprecise probabilities, International Journal of Approximate Reasoning 52, 1147-1170, 2011.
[26] Ferraioli, A. R. e Lettieri, A. Representations of MV-algebras by sheaves. *Mathematical Logic Quarterly*, 57(1):27–43, 2011.
[27] Filipoiu, A. e Georgescu, G. Compact and Pierce representations of MV-algebras. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees*, 40(7):599–618, 1995.
[28] Flaminio, T. e Montagna, F. MV-algebras with internal states and probabilistic fuzzy logics, *International Journal of Approximate Reasoning* 50, 138-152, 2009.
[29] Gehrke, M., van Gool, S. J. e Marra, V. Sheaf representations of MV-algebras and lattice-ordered Abelian groups via Stone-Priestley duality. *Journal of Algebra*, 2014. In corso di stampa.
[30] Gerla, B. MV-algebras, multiple bets and subjective states, *International Journal of Approximate Reasoning*, 1-13, 25(1), 2000.
[31] Gerla, B. A note on functions associated with Gödel formulas. *Soft Comput.*, 4(4):206–209, 2000.
[32] Hájek, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer, Dordrecht 1998.
[33] Halpern, J.Y. *Reasoning about uncertaintity.* MIT Press, 2003.
[34] Johnstone, P. *Stone spaces.* Cambridge University Press, 1982.
[35] Keimel, K. The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves. *Lectures on the Applications of Sheaves to Ring Theory*, pp. 1–98, 1971.
[36] Kemeny, J. Fair bets and inductive probabilities, *The Journal of Simbolic Logic* 20, n.3, 263-273, 1955.
[37] Kroupa, T. Every state on a semisimple MV algebra is integral. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(20), 2771-2782 2006.
[38] Kühr, J. e Mundici, D. De Finetti theorem and Borel states in [0,1]-valued algebraic logic. *International Journal of Approximate Reasoning* 46(3), 605-616, 2007.
[39] Mangani, P. Su certe algebre connesse con logiche a più valori. *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, 8:68–78, 1973.
[40] Marra, V. Is there a probability theory of many-valued events?, in H. Hosni e F. Montagna (ed.), *Probability, Uncertainty and Rationality* (pp. 141-166). CRM Series Vol 10, Edizioni della Normale, Pisa, 2010.
[41] Marra, V. e Mundici, D. The Lebesgue state of a unital Abelian lattice-ordered group, *J. Group Theory*, 10 (2007), 5, 655–684.
[42] Marra, V. e Spada, L. The dual adjunction between MV-algebras and Tychonoff spaces. *Studia Logica (Special issue dedicated to the memory of Leo Esakia)*, 100(1-2):253–278, 2012.
[43] Montagna, F. A notion of coherence for books on conditional events in many-valued logic. *J. Logic Comput.*, 21(5):829–850, 2011.
[44] Mundici, D. Interpretation of AF C* algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *Journal of Functional Analysis*, 65:15–63, 1986.
[45] Mundici, D. Averaging the truth value in Lukasiewicz logic, *Studia Logica* 55(1) 113-127, 1995.
[46] Mundici, D. Bookmaking over infinite-valued events. *International Journal of Approximate Reasoning* 46, 223-240, 2006.
[47] Mundici, D. Faithful and invariant conditional probability in łukasiewicz logic. In *Towards mathematical philosophy*, volume 28 di *Trends Log. Stud. Log. Libr.*, pp. 213–232. Springer, Dordrecht, 2009.
[48] Panti, G. Invariant measures in free MV algebras. *Communications in Algebra* 36 , 2849-2861. 2008.
[49] Paris, J. B. A Note on the Dutch Book Method, in T. S. Gert De Cooman, Terrence Fine (eds), ISIPTA '01, *Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*, Ithaca, NY, USA, Shaler 2001.
[50] Plotkin, B. Some results and problems related to universal algebraic geometry. *Internat. J. Algebra Comput.* 17, 1133–1164, 2007
[51] Rota, G.-C. The valuation ring of a distributive lattice. In *Proceedings of the University of*

Houston Lattice Theory Conference (Houston, Tex., 1973), pp. 574–628. Dept. Math., Univ. Houston, Houston, Tex., 1973.

[52] Rourke, C. P. e Sanderson, B. J. *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[53] Rudin, W., *Functional Analysis*. Seconda edizione, McGraw-Hill Publ., 1991.

[54] Walley, P. Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities, Volume 42 di *Monographs on Statistics and Applied Probability*, Chapman and Hall, London 1991.

(V. Marra) Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Università di Milano, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italia.

(F. Montagna) Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche Università di Siena, Via Roma 56, 53100 Siena Italia

(L. Spada) Institute for Logic, Language, and Computation, Universiteit van Amsterdam, Science Park 107 - 1098 XG Amsterdam, The Netherlands (temporary).

Dipartimento di Matematica, Università di Salerno, Via Giovanni Paolo II 132, 84084 Fisciano (SA), Italia. (permanent).