ESAME MATEMATICA PER L'ECONOMIA E MATEMATICA FINANZIARIA (I SEMESTRE 2015/16)

3 FEBBRAIO 2016

Nome:_____
Cognome: _____
Matricola: _____

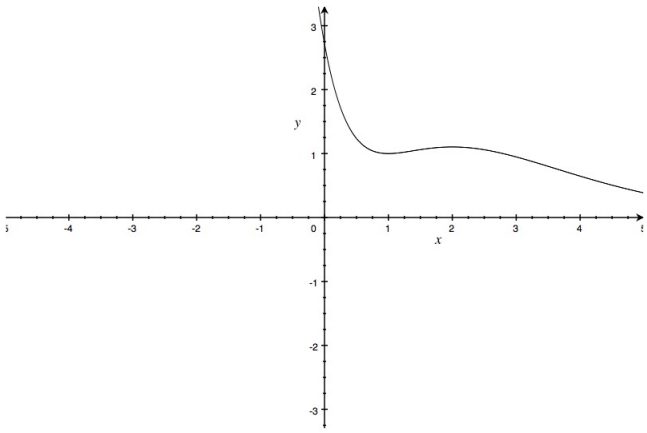
- Tempo a disposizione: **3 ore**.
- Voto massimo: **25/30**.
- è possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Dimostrare per induzione che $2^n > n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$

Soluzione: Per $n = 1$ si ha $2 > 1$ che è banalmente vero. Assumendo $2^k > k$ dimostriamo che $2^{k+1} > k + 1$. Moltiplicando per 2 entrambi i membri della prima disequazione otteniamo: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k$, ma poiché $2k = k + k > k + 1$ per ogni $k \geq 2$ abbiamo che $2^{k+1} > 2k > k + 1$.

Esercizio 2 (7 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^{x-1}}$$



Soluzione:

Esercizio 3 (5 punti)**.** Calcolare l'integrale

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx$$

Soluzione: Integrando per parti e scegliendo x^2 come fattore finito si ha:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

Integrando ancora per parti e scegliendo come fattore finito x, si ha

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x dx =$$
$$= (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + c$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Studiare, al variare del parametro λ il seguente sistema lineare, esplicitando le soluzione quando queste esistono.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + \lambda z = 6 \\ x + z = 3. \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice incompleta è uguale a $\lambda - 6$, pertanto per $\lambda \neq 6$ il sistema ammette un'unica soluzione: $x = 3$, $y = z = 0$. Per $\lambda = 6$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

Esercizio 5 (4 punti)**.** Un prestito di 15000 euro viene restituito con un versamento di 10000 euro dopo 3 anni e un altro di 7000 dopo 6 anni. A quale tasso di interesse è stato concesso il prestito?

Soluzione: Il valore attuale delle rate deve uguagliare l'importo preso a prestito, quindi si ha:

$$15000 = 10000 \cdot (1 + i)^{-3} + 7000 \cdot (1 + i)^{-6}$$

posto $x = (1+i)^{-3}$ si ha $x^2 = (1+i)^{-6}$, da cui si ricava la seguente equazione:

$$7x^2 + 10x - 15 = 0$$

di cui l'unica soluzione accettabile è $x \approx 0,914$. Ricordando che $x = (1+i)^{-3}$ si ha $i \approx 3\%$