ESAME MATEMATICA PER L'ECONOMIA E MATEMATICA FINANZIARIA (I SEMESTRE 2015/16)

14 SETTEMBRE 2016

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

- Tempo a disposizione: **3 ore**.
- Voto massimo: **25/30**. Con voto maggiore o uguale a 18 è possibile (ma non necessario) sostenere l'esame orale per poter conseguire un voto fino a **30 e lode**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 5 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Calcolare il seguente limite fornendo tutti i passaggi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{(x+1)}}{x}.$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x} = 0,$$

Utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$

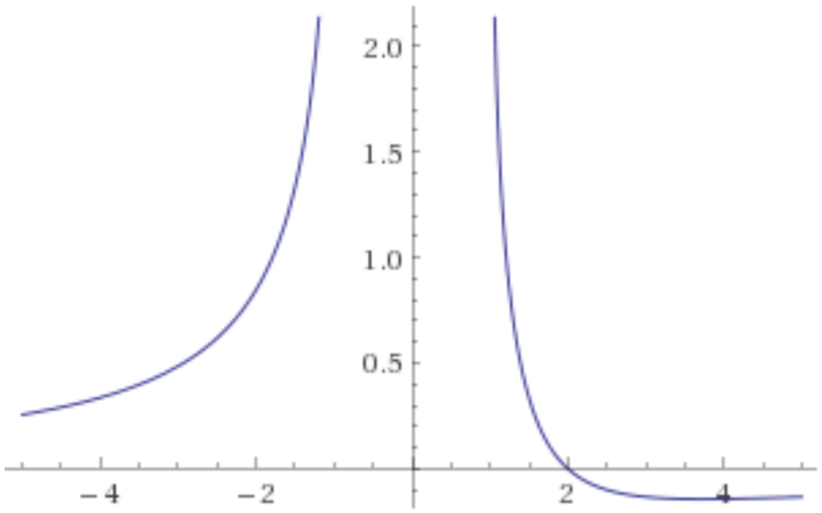
Esercizio 2 (7 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \log\frac{x^2-x+1}{x^2-1}.$$

Calcolare la derivata e impostare la discussione del segno; non è necessario risolverla. L'unico punto di minimo si trova a $x = 2+\sqrt{3} \approx 4$.

Soluzione:

- Dominio: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x < -1 \text{ oppure } x > 1\}$
- Positività: $\log\frac{x^2-x+1}{x^2-1} \ge 0$ sse $\frac{x^2-x+1}{x^2-1} \ge 1$ sse $x^2-x+1 \ge x^2-1$ sse $x-2 \le 0$ sse $x \le -2$.
- Limiti:
  - $\lim_{x\to+\infty} \log\frac{x^2-x+1}{x^2-1} = 0$
  - $\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x^2-x+1}{x^2-1} = 0$
  - $\lim_{x\to-1^-} \log\frac{x^2-x+1}{x^2-1} = +\infty$
  - $\lim_{x\to1^+} \log\frac{x^2-x+1}{x^2-1} = +\infty$
- Derivata: $D(\log\frac{x^2-x+1}{x^2-1}) = \frac{x^2-1}{x^2-x+1}\cdot\frac{(2x-1)(x^2-1)-2x(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}$. Si noti che x^2-x+1 è sempre positivo, quindi $D(\log\frac{x^2-x+1}{x^2-1}) \ge 0$ sse $(2x-1)(x^2-1)^2-2x(x^2-x+1) \ge 0$.



Esercizio 3 (5 punti)**.** Risolvere il seguente integrale:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2+3}}\,dx$$

Soluzione:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int 6x\cdot(3x^2+3)^{-1/2}\,dx = \sqrt{3x^2+3}+c$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Studiare il seguente sistema al variare del parametro k

$$\begin{cases} x+y+3z=1 \\ 2x+2y+kz=6 \\ y+z=3. \end{cases}$$

Soluzione: Il determinante della matrice incompleta è $k-6$. Perciò per $k\neq 6$ il sistema ammette un'unica soluzione (da trovare con il metodo di Cramer). Per $k=6$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni.

Esercizio 5 (4 punti)**.** Si vuole costituire un fondo di 20.000 effettuando 20 versamenti annui posticipati al tasso del 6%. Calcolare la rata necessaria e il valore del fondo dopo il versamento della 10 rata.

Soluzione: La rata di costituzione di calcola dalla formula: $20000 = R\cdot s_{20|0,06}$. Poiché

$$s_{20|0,06} = \frac{(1+0,06)^{20}-1}{0,06} \approx 36,8$$

si ha

$$R = 20000/36,8 \approx 543,47$$

Inoltre, calcolando

$$s_{10|0,06} = \frac{(1+0,06)^{10}-1}{0,06} \approx 13,18$$

Si ha che il montante all'atto del decimo versamento è

$$M = 543,47 \cdot 13,18 \approx 7163.$$