ESAME MATEMATICA PER L'ECONOMIA E MATEMATICA FINANZIARIA (I SEMESTRE 2015/16)

17 FEBBRAIO 2016

Nome:_____
Cognome: _____
Matricola: _____

- Tempo a disposizione: **3 ore**.
- Voto massimo: **25/30**.
- è possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Calcolare il limite

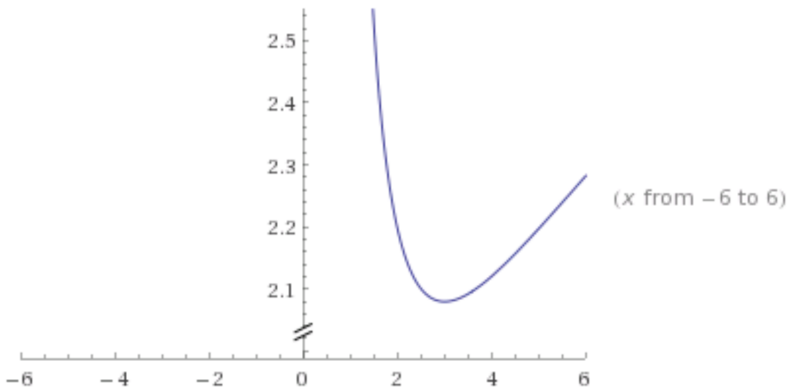
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

Soluzione:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}=e^2$$

Esercizio 2 (5 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$f(x)=\log\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}\right)$$



Soluzione:

Esercizio 3 (4 punti)**.** Calcolare l'integrale

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

Soluzione:

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int (\log x)^2 (\log x)' dx = \frac{(\log x)^3}{3} + c$$

Esercizio 4 (4 punti)**.** Si determinino gli autovalori e i rispettivi autospazi e autovettori della seguente matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è dato dal determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

quindi $P(\lambda) = -x^3 + 4x^2 - 3x$, le cui soluzioni sono $\lambda = 0, 1, 3$. I rispettivi autospazi si ottengono risolvendo l'equazioni $(M - \lambda I) = 0$ per i tre diversi valori di λ. Gli autovettori sono $(2, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)$.

Esercizio 5 (4 punti)**.** Studiare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2y(x + y) + x^3$$

Soluzione: $2y^2 + 2xy + x^3$. Le derivate parziali sono: $\frac{\delta f}{\delta x} = 2y + 3x^2$ e $\frac{\delta f}{\delta y} = 4y + 2x$. Quindi i punti critici sono: $(0, 0)$ e $(1/3, -1/6)$. Nel punto (0,0) l'Hessiano risulta uguale a -4, quindi il punto e di sella. Nel punto $(1/3, -1/6)$, l'Hessiano è $2 \cdot 4 - 4 = 4$, poiché $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(1/3, -1/6) = 2$, il punto è di minimo relativo.

Esercizio 6 (4 punti)**.** Sapendo che in un ammortamento francese la quota capitale al quarto anno è due volte e mezzo la quota interessi allo stesso anno, determinare il tasso annuo d'interesse del prestito sapendo che la durata è 10 anni.

Soluzione: Nell'ammortamento francese valgono le seguenti relazioni:

$$R = I_k + C_k$$
$$R = C_k(1+i)^{n-k+1}$$

Da cui si ottiene $I_k = C_k(1+i)^{n-k+1} - C_k$. Quindi, sapendo che $C_4 = 2,5 \cdot I_4$ abbiamo

$$I_4 = 2,5 \cdot I_4(1+i)^{10-4+1} - 2,5 \cdot I_4$$

dividendo tutto per I_4, otteniamo

$$2,5(1+i)^7 = 1 + 2,5,$$

quindi

$$(1+i)^7 = 3,5/2,5,$$

che dà $i = \sqrt[7]{1,4} - 1 =$ e cioè $i = 4,9\%$.