ESAME MATEMATICA PER L'ECONOMIA E MATEMATICA FINANZIARIA (I SEMESTRE 2015/16)

22 GIUGNO 2016

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

- Tempo a disposizione: **3 ore**.
- Voto massimo: **25/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (4 punti)**.** Calcolare il seguente limite motivando la risposta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi + \operatorname{sen} n}{n}$$

Soluzione: Si noti che

$$\frac{\pi - 1}{n} \leq \frac{\pi + \operatorname{sen} n}{n} \leq \frac{\pi + 1}{n}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi + 1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi - 1}{n} = 0,$$

si ha che anche

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi + \operatorname{sen} n}{n} = 0$$

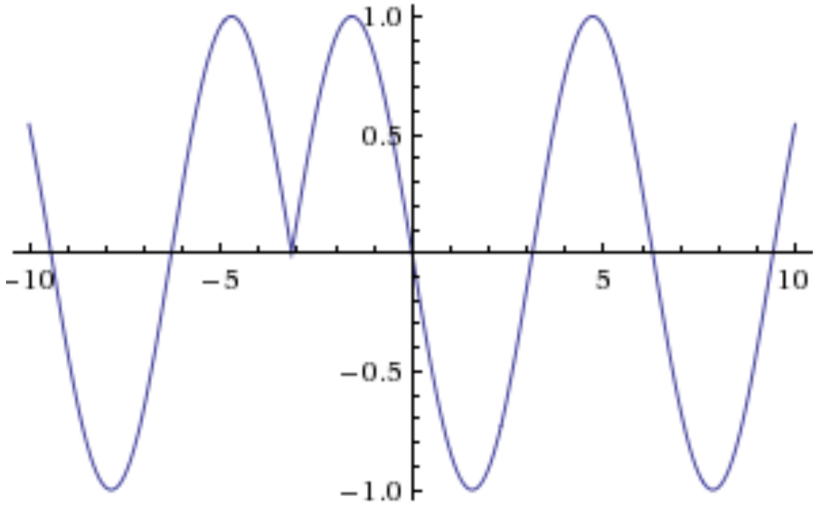
Esercizio 2 (7 punti)**.** Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen}(|x + \pi|)$$

Soluzione:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Limiti: non esistono.
- Derivata: $\frac{(x+\pi)\cos(|x+\pi|)}{|x+\pi|}$
- Segno della derivata: positiva per le x tali che

$$-2k\pi - \frac{5}{2}\pi \leq x \leq -2k\pi - \frac{3}{2}\pi, \quad -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ e}$$
$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$



Esercizio 3 (5 punti)**.** Calcolare il seguente integrale (il logaritmo è in base naturale)

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx$$

Soluzione:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx = 2\sqrt{\log x},$$

quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\log x}}dx = 2\sqrt{\log e} - 2\sqrt{\log 1} = 2 - 0 = 2$$

Esercizio 4 (5 punti)**.** Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando il metodo di Cramer.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + 2x - z = 2 \\ y + x - 2z = 1. \end{cases}$$

Soluzione: La matrice dei coefficienti associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante è 2. La soluzione è $x = 1, y = 0, z = 0$.

Esercizio 5 (4 punti)**.** Si intende costituire la somma di 5000 euro con 10 versamenti annui posticipati, di uguale importo, al tasso del 4%. Calcolare:

(1) la rata da pagare annualmente,
(2) il fondo ottenuto immediatamente dopo il versamento della quarta rata.

Soluzione: 1) La rata da versare si ricava dalla formula del montante di una rendita:

$$5000 = R \cdot s_{10|0,04},$$

quindi $5000 = R \cdot \frac{(1+0,04)^{10}-1}{0,04}$. Da ciò si ricava $R = 416,45$.

2) Il montante al tempo $t = 4$ si ottiene come

$$M = 416,45 \cdot s_{4|0,04},$$

ed è quindi 1768,43.