Proprietà delle potenze

$$x^0 = 1 \qquad \forall x \neq 0 \qquad\qquad 1^\alpha = 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \qquad\qquad x^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{x} \tag{2}$$

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad\qquad x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \tag{3}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad\qquad a \leq b \Rightarrow a^x \leq b^x \tag{4}$$

$$\text{Se } a > 1, x > y \quad a^x > a^y \qquad\qquad \text{Se } a < 1, x > y \quad a^x > a^y. \tag{5}$$

Proprietà dei logaritmi

$x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad\qquad \log_a(a^x) = x \tag{6}$$

$$\log_a(1) = 0 \qquad\qquad \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy) \tag{7}$$

$$\log_\alpha x^y = y \log_\alpha(x) \qquad\qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \text{ se } x \neq 1 \tag{8}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} \tag{9}$$

Trigonometria

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{10}$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \tag{11}$$

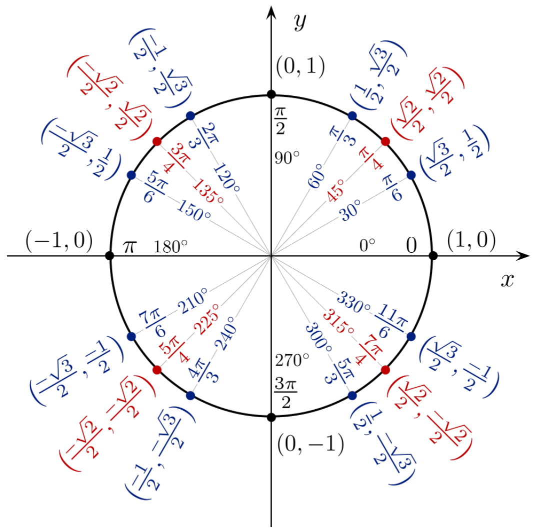
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{12}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x \tag{13}$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi + x) = \cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \tag{14}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x) \tag{15}$$

gradi	rad	sen	cos	tg	cotg
0	0	0	1	0	N.D.
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	N.D.	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \tag{16}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=1] \tag{17}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1 \tag{18}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}=\frac{m}{n} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}=2 \tag{19}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \tag{20}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(e) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e(a) \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1) \tag{22}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{x!}=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1) \tag{23}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+a^x}=\begin{cases}1 \text{ se } a<1\\ \frac{1}{2} \text{ se } a=1\\ 0 \text{ se } a>1\end{cases} \tag{24}$$

Derivate

$$(f+g)'=f'+g' \qquad (f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g' \tag{25}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2} \qquad (f\circ g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x). \tag{26}$$

$$(r')=0 \quad (r\in\mathbb{R}) \qquad (x^r)'=rx^{r-1} \quad (r\in\mathbb{R}) \tag{27}$$

$$(\log_a(x))'=\frac{\log_a e}{x} \qquad (a^x)'=a^x\log_e(a) \tag{28}$$

$$(\operatorname{sen}(x))'=\cos x \qquad (\cos(x))'=-\operatorname{sen}(x) \tag{29}$$

$$(\operatorname{tg}(x))'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg}(x))'=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \tag{30}$$

$$(\operatorname{arcsen}(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{31}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccotg}(x))'=-\frac{1}{1+x^2} \tag{32}$$

Algebra degli o-piccoli

La funzione f è un *o-piccolo* di g per $x\to x_0$ (notazione $f=o_{x_0}(g)$) se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$$o(c\cdot g(x))=o(g(x)) \tag{33}$$

$$c\cdot o(g(x))=o(g(x)) \tag{34}$$

$$o(f(x))+o(f(x))=o(f(x)) \tag{35}$$

$$f(x)\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x)) \tag{36}$$

$$o(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x)) \tag{37}$$

$$\text{se } f(x)=o(g(x)) \text{ e } a>0 \text{ allora } [f(x)]^a=o\left([g(x)]^a\right) \tag{38}$$

$$o(o(g(x)))=o(g(x)) \tag{39}$$

$$\text{se } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \text{ allora } o(f(x))=o(g(x)) \tag{40}$$

Se $m,n\in\mathbb{N}$ e $x_0=0$ allora valgono anche

$$x^m=o(x^n) \qquad \forall n<m \tag{41}$$

$$o(x^m)+o(x^n)=o(x^{\min\{m,n\}}) \tag{42}$$

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{(m+n)}) \tag{43}$$

$$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{(m+n)}) \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

Sviluppi di Taylor

Se f è derivabile n volte nel punto x_0 si ha:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x^n) \tag{46}$$

Sviluppi di Taylor intorno al punto 0 delle principali funzioni

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{47}$$

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{48}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}((2n-3)!)!x^n}{((2n)!)!} \tag{49}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \tag{50}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots + \frac{(-1)^n((2n-1)!)!x^n}{((2n)!)!} + o(x^n) \tag{51}$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n) \tag{52}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^n) \tag{53}$$

$$\operatorname{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \tag{54}$$

1 Integrali

1.1 Integrali notevoli

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \int \frac{1}{x}dx = \log(|x|) + c \tag{55}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c \qquad \int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + c \tag{56}$$

$$\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + c \qquad \int \operatorname{tg}(x)dx = \log|\cos(x)| + c \tag{57}$$

$$\int \operatorname{cotg}(x)dx = -\log|\cos(x)| + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \operatorname{tg}(x) + c \tag{58}$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}dx = -\operatorname{cotg}(x) + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}(x) + c \tag{59}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x) + c \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \tag{60}$$

$$\int f^\alpha f' dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ se } \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{f'}{f}dx = \log(|f|) + c \tag{61}$$

$$\int \frac{f'}{1+f^2}dx = \operatorname{arctg}(f) + c \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = \operatorname{arcsen}(f) + c \tag{62}$$

1.2 Calcolo di aree e volumi

Se f e g sono due funzioni continue e non negative, l'area della porzione di piano delimitata dalle due funzioni e dai valori $x = a$ e $x = b$ è data da

$$\int |f(x) - g(x)|dx.$$

Se f è una funzione continua e non negativa su $[a, b]$, il volume del solido limitato da a eb, ottenuto facendo ruotare la funzione f intorno all'asse delle x è dato da:

$$\pi \int f^2(x)dx.$$

Similmente, se f e g sono due funzioni continue e non negative, il volume del solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle x la porzione di piano delimitata dalle due funzioni e dai valori $x = a$ e $x = b$ è dato da

$$\pi \int |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

2 Serie numeriche

2.0.1 Serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

2.0.2 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

2.1 Criteri di convergenza delle serie

Teorema 1 (Criterio del confronto). *Se $0 \leq a_n \leq b_n$ per due successioni qualsiasi, allora*

1. *Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge.*
2. *Se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge.*

Teorema 2 (Criterio degli infinitesimi). *Se $a_n \geq 0$ una successione qualsiasi, e supponiamo che per qualche $p \in \mathbb{R}$ si abbia*

$$\lim_{n \to +\infty} n^p a_n = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora

1. *Se $l \neq +\infty 1$ e $p > 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.*
2. *Se $l \neq 0$ e $p \leq 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.*

Teorema 3 (Criterio del rapporto). *Se $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per due successioni qualsiasi, e*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora

1. *Se $l < 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.*
2. *Se $l > 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.*

Teorema 4 (Criterio della radice). *Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ per due successioni qualsiasi, e*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

allora

1. *Se $l < 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.*
2. *Se $l > 1$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.*

Teorema 5 (Criterio di Leibniz). *Data la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ con $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, se allora*

1. *La successione a_n è decrescente e*
2. *$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$*

allora la serie e convergente.

Teorema 6 (Convergenza assoluta). *Se $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.*