

ALGEBRA DELLA LOGICA

Prima lezione

Luca Spada

Dipartimento di Matematica
Università di Salerno

<http://logica.dmi.unisa.it/lucaspada>

Scuola AILA 2017

Palazzo Feltrinelli, Gargnano, 20–26 agosto 2017.

Piano delle lezioni

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

Algebra di
Boole

Lezione 1: Logica proposizionale, algebre di Boole.

Lezione 2: Algebra di Lindenbaum, completezza algebrica

Lezione 3: Algebrizzazione della logica.

Lezione 4: Dualità.

Lezione 5: Logiche non classiche.

Lezione 6: Applicazioni: interpolazione, eliminazione del taglio, etc.

Bibliografia

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

Algebre di
Boole

 J. W. Blok and D. Pigozzi. **Algebraizable logics**. *Memories of the AMS*. 396, 1989. Available at <http://orion.math.iastate.edu/dpigozzi/>

 G. Metcalfe, F. Paoli, and C. Tsinakis. **Ordered Algebras and Logic**. in H. Hosni and F. Montagna ed., *Probability, Uncertainty, Rationality*. Edizioni della Normale, pp. 1-85, 2010.

 P. Halmos, S. Givant. **Logic as Algebra**. Dolciani Mathematical Expositions (Book 21)1998.

 S. Burris and H. P. Sankappanavar. **A Course in Universal Algebra**. 2000. Available at <http://www.math.hawaii.edu/~ralph/Classes/619/univ-algebra.pdf>

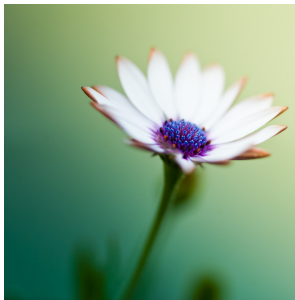
 P. T. Johnstone. **Stone spaces**. Cambridge university press. 1986

 H. Rasiowa. **An Algebraic Approach to Non-Classical Logics**. Elsevier 1974.

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole





Intro

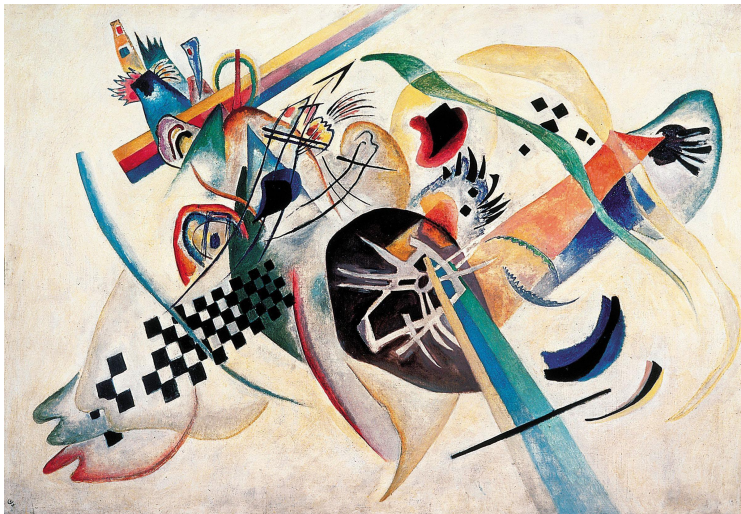
La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole



Feedback?

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole

Tutti i commenti e i suggerimenti sono benvenuti!



Sarahah

<https://lucaaspada.sarahah.com>

The laws of thought

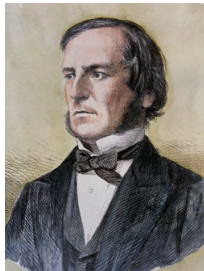
Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole



George Boole
(1815–1864)



Ernst Schröder
(1841–1902)



Charles S. Peirce
(1839–1914)

Non classical logics

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole



Emil L. Post
(1897–1954)



Clarence I. Lewis
(1883–1964)



Jan Łukasiewicz
(1878–1956)

The algebra of logic

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole



Alfred Tarski (1902-1983)



Adolf Lindenbaum
(1904-1941)

Sintassi della logica proposizionale

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Supponiamo di avere un insieme numerabile di simboli:
 $PVar = \{p, q, r, s, \dots p_1, p_2, \dots\}$ che chiameremo **variabili proposizionali**. Il linguaggio della logica proposizionale (classica) è dato dai seguenti simboli

$\neg$ (negazione),

$\vee$ (disgiunzione),

$\wedge$ (congiunzione),

$\rightarrow$ (implicazione),

$(,)$ (parentesi —simboli ausiliari)

e tutti i simboli in $PVar$.

Sintassi della logica proposizionale

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Siamo interessati solamente all'insieme Form delle stringhe di simboli in questo linguaggio costruite come segue:

- ▶ ogni elemento di PVar appartiene a Form ,
- ▶ se $\varphi \in \text{Form}$, allora anche $(\neg\varphi) \in \text{Form}$,
- ▶ se $\varphi, \psi \in \text{Form}$, allora anche
 - ▶ $(\varphi \wedge \psi) \in \text{Form}$,
 - ▶ $(\varphi \vee \psi) \in \text{Form}$,
 - ▶ $(\varphi \rightarrow \psi) \in \text{Form}$.

Esempi

Chiameremo **formule (proposizionali)** tutti gli elementi di Form.

La seguente stringa è una formula: $((\neg(p \vee (\neg q))) \rightarrow r)$.

Le seguenti stringhe NON sono formule:

- ▶ $((\neg(p \vee (\neg qr)))$,
- ▶ $(p \neg q)$,
- ▶ $p \vee q$.

Alcune parentesi si possono evitare adottando una convenzione riguardo alla priorità dei connettivi: il simbolo $\neg$ ha priorità massima, poi vengono i simboli $\vee$ e $\wedge$, e infine il simbolo $\rightarrow$. Così, convenzionalmente, la scrittura $p \vee q$ denota univocamente la formula $(p \vee q)$.

Semantica della logica proposizionale

Algebra della
Logica

Luca Spada

La semantica della logica proposizionale è **bivalente**. Ogni variabile proposizionale può assumere valore

vero: 1, o **falso**: 0.

Chiameremo **valutazione** una qualsiasi funzione

$$v: \text{PVar} \rightarrow \{0, 1\}.$$

La semantica delle formule composte dipende esclusivamente dalla semantica delle sue componenti (**vero-funzionalità**).

φ	$\neg\varphi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Semantica della logica proposizionale

Algebra della
Logica

Luca Spada

Le tavole di verità permettono di estendere univocamente ogni valutazione a una funzione

$$\tilde{v}: \text{Form} \rightarrow \{0, 1\},$$

dotando ogni formula di un valore di verità.

- ▶ Una formula φ è **soddisfacibile** se **esiste almeno una valutazione** v tale che $\tilde{v}(\varphi) = 1$.
- ▶ Una formula φ è una **tautologia** se **per ogni valutazione** v si ha $\tilde{v}(\varphi) = 1$. In questo caso scriveremo $\models \varphi$.
- ▶ Diremo che una formula φ è **conseguenza logica** di un insieme di formule Γ , in simboli $\Gamma \models \varphi$, se ogni valutazione che rende vere tutte le formule in Γ rende vera anche φ .

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Esempi

- ▶ La formula $p \wedge q$ è soddisfacibile, basta infatti considerare una valutazione v che mandi sia p che q in 1.
- ▶ La formula $p \wedge \neg p$ non è soddisfacibile, la formula risulta falsa sia assegnando a p il valore di verità 1 che assegnandole valore di verità 0.
- ▶ La formula $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ è una tautologia (esercizio).
- ▶ La formula $p \rightarrow q$ è conseguenza logica di $q \wedge \neg q$.

Definiamo

- ▶ $\varphi \leftrightarrow \psi$ è un abbreviazione per $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.
- ▶ $\top$ è un abbreviazione per $(\varphi \rightarrow \varphi)$.
- ▶ $\perp$ è un abbreviazione per $\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$.

Esistono vari **sistemi deduttivi** per la logica classica:

- ▶ il **calcolo alla Gentzen**:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$$

- ▶ la **deduzione naturale**:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \xi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \xi \end{array}}{\xi}$$

- ▶ il **calcolo alla Hilbert**:
$$\frac{(\psi \vee \xi) \rightarrow \varphi \quad (\psi \vee \xi)}{\varphi}$$

- ▶ la **risoluzione**:
$$\frac{\{\varphi\} \quad \{\neg\varphi\}}{\square}$$

- ▶ etc.

Se φ è derivata in uno di questi calcoli a partire dalle ipotesi in Γ , scriveremo $\Gamma \vdash \varphi$.

La completezza della logica proposizionale 1

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

I teoremi di completezza asseriscono l'equivalenza

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma \models \varphi$$

Di solito la dimostrazione dell'implicazione $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$ richiede una semplice **induzione sulla lunghezza della derivazione**.

Per dimostrare l'altra implicazione invece di solito si stabiliscono i seguente risultati ausiliari.

Definizione

Diremo che un insieme di formule Γ è coerente se $\Gamma \not\vdash \perp$.

La completezza della logica proposizionale 2

Algebra della
Logica

Luca Spada

Lemma

Se Γ è un insieme di formule, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) Γ non è coerente,
- (ii) per ogni formula φ si ha $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iii) esiste una formula φ per cui $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$,

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Dimostrazione.

L'implicazione (i) $\rightarrow$ (ii) è un'immediata applicazione di *ex falsum quodlibet*.

L'implicazione (ii) $\rightarrow$ (iii) è banale.

L'implicazione (iii) $\rightarrow$ (i) usa semplicemente la definizione di $\perp \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$ e il fatto che se due formule sono provabili lo è anche la loro congiunzione. □

La completezza della logica proposizionale 3

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole

Lemma

Se $\Gamma \not\vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è coerente.

Dimostrazione.

Dimostriamo la contronominale. Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è incoerente, abbiamo $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$, ma allora segue $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$ e in logica proposizionale $(\neg\varphi \rightarrow \perp) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi) \leftrightarrow (\varphi)$. Quindi $\Gamma \vdash \varphi$ e il lemma è provato. $\square$

La completezza della logica proposizionale 4

Algebra della
Logica

Luca Spada

Definizione

Un insieme di formule si dice **massimalmente coerente** se è coerente e ogni sua estensione è incoerente.

Lemma

Ogni insieme coerente può essere esteso a un insieme massimalmente coerente.

Dimostrazione

L'insieme Form è enumerabile, quindi possiamo assumere che le formule siano in una sequenza del tipo $\varphi_1, \varphi_2, \dots$.

Definiamo una sequenza non decrescente di insiemi, tali che la loro unione sia massimalmente coerente.

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole

La completezza della logica proposizionale 5

Algebra della
Logica

Luca Spada

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &:= \Gamma, \\ \Gamma_{n+1} &:= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se è coerente} \\ \Gamma_n & \text{altrimenti,} \end{cases} \\ \Gamma^* &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n\end{aligned}$$

Γ^* è coerente, perché lo sono tutti i Γ_n per costruzione.

Γ^* è massimalmente coerente.

Osservazione

Ogni insieme Γ massimalmente coerente è **chiuso per deduzioni**. Inoltre, per ogni formula φ , $\varphi \in \Gamma$ o $\neg\varphi \in \Gamma$.

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

La completezza della logica proposizionale 6

Algebra della
Logica

Luca Spada

Lemma

Se Γ è coerente, esiste una valutazione v tale che $v(\varphi) = 1$ per ogni $\varphi \in \Gamma$.

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Dimostrazione.

Se Γ è coerente, esiste Γ^* massimalmente coerente che estende Γ . Definiamo

$$v(p_i) = 1 \text{ se, e soltanto se, } p_i \in \Gamma^*$$

Claim: $\tilde{v}(\varphi) = 1$ se, e soltanto se, $\varphi \in \Gamma^*$.

Dimostrazione del Claim: per induzione sulla lunghezza della formula (esercizio). □

La completezza della logica proposizionale $\neg$

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebre di
Boole

Teorema

Se $\Gamma \not\vdash \varphi$ allora $\Gamma \not\models \varphi$, in altre parole esiste una valutazione v tale che $v(\psi) = 1$ per ogni $\psi \in \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$.

Dimostrazione.

Se $\Gamma \not\vdash \varphi$ allora $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è coerente. Dunque esiste $\tilde{v}$ tale che $\tilde{v}(\psi) = 1$ per ogni $\psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Quindi $v(\psi) = 1$ per ogni $\psi \in \Gamma$ e $v(\varphi) = 0$. □

Alcune tautologie importanti

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

La logica pro-
posizionale

Algebra di
Boole

Le seguenti sono (schemi di) tautologie della logica proposizionale;

1. $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ e $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,
2. $\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$,
3. $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \leftrightarrow \psi$ e $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \leftrightarrow \psi$,
4. $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\psi \wedge \xi)$ e
 $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\psi \vee \xi)$,
5. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ e $\varphi \vee \neg\varphi$

Strutture del primo ordine

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

Algebra di
Boole

Un linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L}$ è dato da una famiglia di simboli di **costanti**, una di simboli di **funzioni** e una di simboli di **predicati**:

$$\mathcal{L} = \langle c_1, \dots, c_p, f_1^{m_1}, \dots, f_q^{n_q}, P_1^{n_1} \dots, P_r^{n_r} \rangle$$

dove $m_1, \dots, m_q, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ e sono detti **arietà** dei corrispondenti simboli. Una struttura per un linguaggio $\mathcal{L}$ del prim'ordine è un insieme A con un'interpretazione della giusta arietà per ogni simbolo in $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} = \langle c_1^A, \dots, c_p^A, f_1^A, \dots, f_q^A, P_1^A \dots, P_r^A \rangle$$

Esempio

Una struttura per il linguaggio $\langle R^2 \rangle$ è data da una qualsiasi insieme A con l'uguaglianza, in altre parole R^A è $=^A$.

Un'algebra è una struttura per un linguaggio del prim'ordine dove non compaiono simboli di predicato.

Esempio

1. i semigrupperi: $\mathcal{L} = \langle +^2 \rangle$,
2. i gruppi: $\mathcal{L} = \langle +^2, -^1, 0 \rangle$,
3. gli anelli: $\mathcal{L} = \langle +^2, \cdot^2, -^1, 0, 1 \rangle$,
4. i reticoli: $\mathcal{L} = \langle \wedge^2, \vee^2 \rangle$.

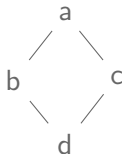
Definizione

Un'algebra di Boole è una struttura del tipo $\langle A, \wedge^2, \vee^2, \neg^1, 0, 1 \rangle$, che soddisfi i seguenti assiomi:

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ e $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
2. $x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$,
3. $(x \wedge y) \vee y = y$ e $(x \vee y) \wedge y = y$,
4. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$ e
 $(x \wedge y) \vee z = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$,
5. $x \wedge \neg x = 0$ e $x \vee \neg x = 1$

Esempi

1. Se S è un insieme, allora $\langle \mathcal{P}(S), \cap, \cup, \sim, \emptyset, S \rangle$ è un'algebra di Boole.
2. L'algebra $\langle \{0, 1\}, \min, \max, 1 - x, 0, 1 \rangle$ è un'algebra di Boole.
3. La seguente è un'algebra di Boole



4. Se $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ è un'algebra di Boole, allora anche $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$ lo è.

5. Sia $m > 1$ un intero e sia A l'insieme dei divisori di m (incluso 1). Definiamo per ogni $a, b \in A$

$$a \wedge b := \text{MCD}\{a, b\}$$

$$a \vee b := \text{mcm}\{a, b\}$$

$$\neg a := m/a.$$

Se m non è divisibile per il quadrato di nessun numero diverso da 1, allora A è un'algebra di Boole. Infatti in questo caso c'è una corrispondenza tra divisori di m e i sottoinsiemi dei numeri primi che dividono m .

Proprietà delle algebre di Boole

Algebra della
Logica

Luca Spada

Ogni algebra di Boole ha un ordine parziale naturale, definito da

$$a \leq b \text{ se, e soltanto se, } a \vee b = b$$

Intro

Algebre di
Boole

Esercizio

Provare che la relazione così definita è un ordine parziale, cioè una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva).

In quest'ordine 0 è sempre il più piccolo elemento dell'algebra e 1 è il più grande.

Seguendo il parallelo con la logica proposizionale ha senso definire i connettivi:

$$x \rightarrow y := \neg x \vee y,$$

$$x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x).$$

Sia $\text{Var} := \{x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots\}$ un insieme numerabile di simboli, che chiameremo **variabili individuali**. Le operazioni fondamentali in un'algebra di Boole sono $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$, ma abbiamo visto che se ne possono costruire altre (es. $\rightarrow$). Definiamo l'insieme **Term** dei **termini** (o **funzioni definibili**) in analogia con **Form**:

- ▶ ogni elemento di **Var** appartiene a **Term**,
- ▶ se $t \in \text{Term}$, allora anche $(\neg t) \in \text{Term}$,
- ▶ se $t, s \in \text{Term}$, allora anche
 - ▶ $(t \wedge s) \in \text{Term}$,
 - ▶ $(t \vee s) \in \text{Term}$,

Scriveremo $t(x_1, \dots, x_n)$ per evidenziare il fatto che le variabili individuali in t sono **comprese** tra le variabili $x_1, \dots, x_n$.

L'insieme Term può essere dotato naturalmente di una struttura del prim'ordine per il linguaggio delle algebre di Boole

- ▶ $t \wedge^{\text{Term}} s = t \wedge s$,
- ▶ $t \vee^{\text{Term}} s = t \vee s$,
- ▶ $\neg^{\text{Term}} t = \neg t$.

L'algebra $\langle \text{Term}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ è detta l'**algebra assolutamente libera** per $\langle \wedge^2, \vee^2, \neg, 0, 1 \rangle$. Si noti che quanto fatto per Term poteva essere fatto anche con Form.

Osservazione

L'algebra $\langle \text{Term}, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ **non è** però un'algebra di Boole. Per esempio l'equazione $x \wedge y = y \wedge x$ non è valida in Term, perché i termini $x \wedge y$ e $y \wedge x$ sono diversi!

- ▶ Se A è un'algebra di Boole, definiamo un'interpretazione in A come una funzione $e: \text{Var} \rightarrow A$.
- ▶ In analogia con le valutazioni, un'interpretazione e si estende univocamente a una funzione $\tilde{e}: \text{Term} \rightarrow A$.
- ▶ Quando l'interpretazione è chiara dal contesto, scriveremo t^A per indicare l'interpretazione del termine t in A .
- ▶ Una interpretazione in $e: \text{Var} \rightarrow A$, verifica un'equazione tra due termini $s(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)$, se l'identità

$$s(e(x_1), \dots, e(x_n)) = t(e(x_1), \dots, e(x_n))$$

è vera in A .

validità nell'algebra di Boole

Algebra della
Logica

Luca Spada

Intro

Algebra di
Boole

L'equazione $s(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)$ è **valida** in A se per ogni interpretazione e a valori in A l'uguaglianza

$$s^A(e(x_1), \dots, e(x_n)) = t^A(e(x_1), \dots, e(x_n))$$

vale in A . In questo caso scriveremo

$$A \models_{BA} s(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n).$$

Se Γ è un insieme di equazioni, scriveremo

$$\Gamma \models_{BA} s(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)$$

se per ogni algebra di Boole A , ogni interpretazione in A che verifica tutte le equazioni in Γ , verifica anche $s(x_1, \dots, x_n) = t(x_1, \dots, x_n)$.