Algebra della Logica

Seconda lezione

Luca Spada

Dipartimento di Matematica
Università di Salerno
http://logica.dmi.unisa.it/lucaspada

Scuola AILA 2017
Palazzo Feltrinelli, Gargnano, 20–26 agosto 2017.

Nella lezione precedente

- Completezza della logica classica.
- Valutazioni: $v \colon \texttt{Form} \to \{0, 1\}$.
- Algebre di Boole.
- interpretazioni: $e \colon \texttt{Term} \to A$.

Omomorfismi

La maggior parte delle informazioni riguardanti un'algebra di Boole possono essere ottenute studiando le deformazioni dell'algebra.

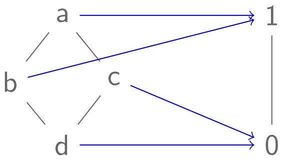
Definizione

Un omomorfismo di algebre di Boole è una funzione $f \colon A \to B$ tale che $\forall x, y \in A$:

$$
\begin{aligned}
f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y) \\
f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \\
f(\neg x) &= \neg f(x) \\
f(0) &= 0 \\
f(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

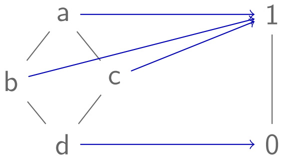
Un omomorfismo biettivo è detto isomorfismo.

Esempi



È un omomorfismo, es.

$$\begin{gathered} b \wedge c = 0 \\ \text{e} \\ f(b \wedge c) = 0 = 1 \wedge 0 \\ \qquad = f(b) \wedge f(c). \end{gathered}$$



Non è un omomorfismo, perché

$$\begin{gathered} b \wedge c = 0 \\ \text{ma} \\ f(b) \wedge f(c) = 1 \wedge 1 = 1 \end{gathered}$$

Esempio

Sia S un insieme non vuoto e $\langle \wp(S), \cap, \cup, \sim, \emptyset, S \rangle$ l'algebra di Boole associata. Fissato $s \in S$, definiamo per ogni $X \in \wp(S)$

$$\chi_s(X) := \begin{cases} 1 & \text{se } s \in X \\ 0 & \text{se } s \notin X. \end{cases}$$

Allora χ_s è un omomorfismo da $\wp(S)$ in $\{0, 1\}$.

Kernel di un omomorfismo

A volte può essere complicato ragionare solo con gli omomorfismi.

Definizione

Se $f\colon A \to B$ è un omomorfismo di algebre di Boole, definiamo
$$\ker(f) := \{a \in A \mid f(a) = 1\}.$$

Se $f\colon A \to B$ è suriettivo, il suo ker possiede abbastanza informazioni per ricostruire l'intera funzione.

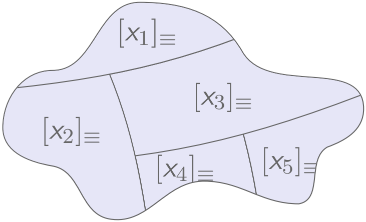
Quozienti

Definiamo

$$x \equiv y \text{ se, e soltanto se, } x \leftrightarrow y \in \ker(f),$$

si ha una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva). Inoltre $\equiv$ rispetta le operazioni di algebra booleana:

$$\begin{aligned} \text{Se } x_1 \equiv x_2 \text{ e } y_1 \equiv y_2 \text{ allora } x_1 \wedge y_1 &\equiv x_2 \wedge y_2 \\ x_1 \vee y_1 &\equiv x_2 \vee y_2 \\ \neg x_1 &\equiv \neg x_2 . \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} [x]_\equiv \wedge [y]_\equiv &:= [x \wedge y]_\equiv , \\ [x]_\equiv \vee [y]_\equiv &:= [x \vee y]_\equiv , \\ \neg [x]_\equiv &:= [\neg x]_\equiv . \end{aligned}$$

Filtri

Il ker di un omomorfismo ha le seguenti proprietà:

1. $1 \in \ker(f)$,
2. Se $x \in \ker(f)$ e $y \geq x$, allora anche $y \in \ker(f)$.
3. Se $x, y \in \ker(f)$, allora anche $x \wedge y \in \ker(f)$.

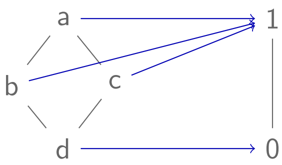
Chiameremo filtro un qualunque sottoinsieme di un'algebra di Boole che soddisfa le proprietà 1-3 qui sopra.

Filtri

Il ker di un omomorfismo ha le seguenti proprietà:

1. $1 \in \ker(f)$,
2. Se $x \in \ker(f)$ e $y \geq x$, allora anche $y \in \ker(f)$.
3. Se $x, y \in \ker(f)$, allora anche $x \wedge y \in \ker(f)$.

Chiameremo filtro un qualunque sottoinsieme di un'algebra di Boole che soddisfa le proprietà 1-3 qui sopra.



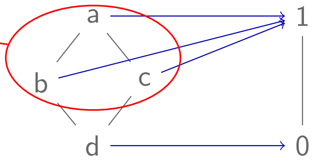
Filtri

Il ker di un omomorfismo ha le seguenti proprietà:

1. $1 \in \ker(f)$,
2. Se $x \in \ker(f)$ e $y \geq x$, allora anche $y \in \ker(f)$.
3. Se $x, y \in \ker(f)$, allora anche $x \wedge y \in \ker(f)$.

Chiameremo **filtro** un qualunque sottoinsieme di un'algebra di Boole che soddisfa le proprietà 1-3 qui sopra.

Non è un filtro!



Filtri

Proposizione

Se F è un filtro dell'algebra di Boole A, allora la relazione $\equiv$ definita da

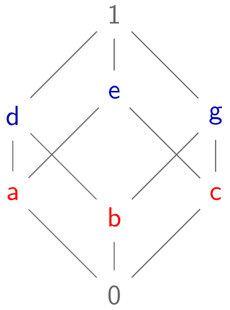
$$x \equiv_F y \text{ se, e soltanto se, } x \leftrightarrow y \in F,$$

*è una **congruenza**, cioè una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni booleane.*

Se A è un'algebra di Boole e F è un filtro definiamo A/F come l'algebra il cui supporto è l'insieme delle classi di equivalenza di $\equiv$ e le operazioni sono definite come segue:

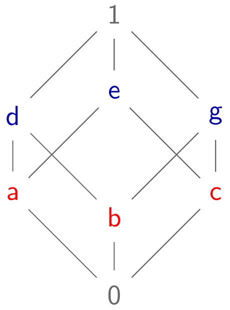
$$[x]_F \wedge [y]_F := [x \wedge y]_F,$$
$$[x]_F \vee [y]_F := [x \vee y]_F,$$
$$\neg[x]_F := [\neg x]_F,$$
$$1 := [1]_F \quad \text{e} \quad 0 := [0]_F$$

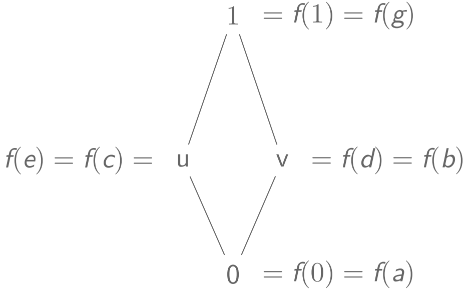
Esempi



- $F = \{e, g\}$ non è un filtro.
- $F = \{e, g, c, 1\}$ è un filtro, $A/F = \{0, 1\}$

Esempi





- $F = \{e, g\}$ non è un filtro.
- $F = \{e, g, c, 1\}$ è un filtro, $A/F = \{0, 1\}$
- $F = \{g, 1\}$ è un filtro, A/F è l'algebra di 4 elementi vista prima.

Teorema di omomorfismo

Teorema (teorema fondamentale di omomorfismo)

Se $f\colon A \to B$ è un omomorfismo **suriettivo** *di algebre di Boole, allora $A/\mathrm{ker}(f)$ è isomorfa a B. Inoltre f è iniettiva se, e soltanto se, $\mathrm{ker}(f) = \{1\}$.*
Viceversa, c'è un **omomorfismo naturale** *$\pi_F\colon A \to A/F$ che manda ogni a in $[a]$ e $\mathrm{ker}(\pi_F) = F$.*

Sottalgebre

È facile notare che sebbene un omomorfismo $f\colon A \to B$ non debba necessariamente essere suriettivo, la sua immagine $f[A]$ è sempre chiusa rispetto alle operazioni di algebra di Boole (basta leggere gli assiomi di omomorfismo da destra verso sinistra)

Definizione

Una sottalgebra di un'algebra di Boole A è un sottoinsieme $S \subseteq A$ chiuso rispetto alle operazioni di algebra di Boole. In altre parole tale che $\forall s, t \in S$

$$s \wedge t, s \vee t, \neg s, 0, 1 \in S$$

Esempio

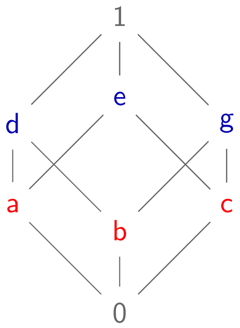
Sia S un insieme e $A = \langle \wp(S), \cap, \cup, \sim, \emptyset, S \rangle$ l'algebra di Boole dei suoi sottoinsiemi. L'insieme B di tutti i sottoinsiemi di S finiti o cofiniti (=insime il cui complemento è finito) forma una sottalgebra di A. Infatti:

- complemento di finito = cofinito,
- finito $\cup$ finito = finito,
- finito $\cup$ cofinito = cofinito,
- finito $\cap$ finito = finito,
- finito $\cap$ cofinito = finito,

Sottalgebre generate

Le sottalgebre sono evidentemente chiuse per intersezione. Quindi dato un sottoinsieme S di un'algebra di Boole A, definiamo la **sottalgebra generata** da S come l'intersezione di tutte le algebre contenuti S.

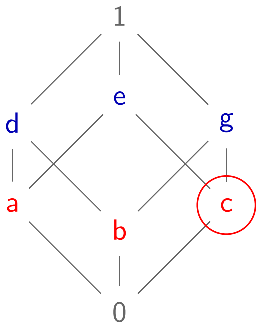
Esempio



Sottalgebre generate

Le sottalgebre sono evidentemente chiuse per intersezione. Quindi dato un sottoinsieme S di un'algebra di Boole A, definiamo la sottalgebra generata da S come l'intersezione di tutte le algebre contenuti S.

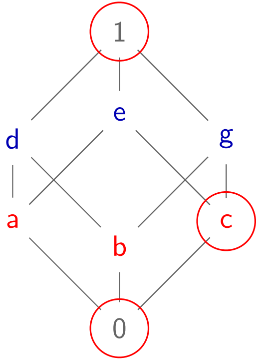
Esempio



Sottalgebre generate

Le sottalgebre sono evidentemente chiuse per intersezione. Quindi dato un sottoinsieme S di un'algebra di Boole A, definiamo la **sottalgebra generata** da S come l'intersezione di tutte le algebre contenuti S.

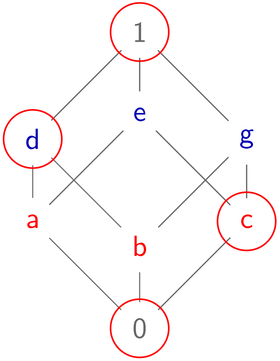
Esempio



Sottalgebre generate

Le sottalgebre sono evidentemente chiuse per intersezione. Quindi dato un sottoinsieme S di un'algebra di Boole A, definiamo la **sottalgebra generata** da S come l'intersezione di tutte le algebre contenuti S.

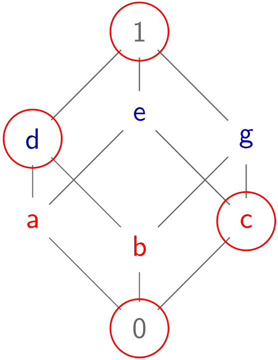
Esempio

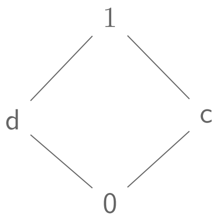


Sottalgebre generate

Le sottalgebre sono evidentemente chiuse per intersezione. Quindi dato un sottoinsieme S di un'algebra di Boole A, definiamo la sottalgebra generata da S come l'intersezione di tutte le algebre contenuti S.

Esempio





Quozienti e sottalgebre

Quozienti e sottalgebre combinati insieme danno qualsiasi omomorfismo (a meno di isomorfismi)

Teorema (teorema fondamentale di omomorfismo (versione generale))

Se $f\colon A \to B$ è un qualsiasi omomorfismo di algebre di Boole, allora f si fattorizza in un omomorfismo suriettivo $\pi_{\equiv}\colon A \to A/\mathrm{ker}(f)$ e un omomorfismo iniettivo $\iota\colon A/\mathrm{ker}(f) \to B$ con $f = \iota \circ \pi_{\equiv}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_{\equiv}"'] & & B \\
& A/\mathrm{ker}(f) \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Ancora su filtri

L'intersezione di una famiglia di filtri in un algebra di Boole è ancora un filtro. Quindi ha senso definire il filtro generato da un qualsiasi sottoinsieme S di A, come l'intersezione di tutti i filtri che lo contengono. Un filtro è detto proprio se non contiene 0.

Definizione

Un filtro è detto massimale (o ultrafiltro) se è proprio e non esistono filtri propri che lo estendano.

Filtri massimali

Proposizione

Per ogni filtro F proprio di un'algebra di Boole A le seguenti sono equivalenti:

1. *F è massimale,*
2. *per ogni $a \in A$, $a \in F$ oppure $\neg a \in F$,*
3. *$A/F \cong 2$.*

Dimostrazione

$1 \Rightarrow 2$ Se F è massimale e a e $\neg a$ non gli appartengono, allora i filtri generati da $F \cup \{a\}$ e $F \cup \{\neg a\}$ non sono propri. Quindi esistono $u, v \in F$, tali che $u \wedge a = 0$ e $v \wedge \neg a = 0$. Sia $w = u \wedge v \in F$, si ha
$0 = (w \vee a) \vee (w \wedge \neg a) = w \wedge (a \vee \neg a) = w \wedge 1 = w$, una contraddizione.

Filtri massimali

Dimostrazione

$2 \Rightarrow 3$ Se F è proprio allora $[0]_F \neq [1]_F$. Inoltre, per 2, per ogni $a \in A$ o $[a] = 1$ (se $a \in F$) o $[a] = 0$ (se $\neg a \in F$).

Filtri massimali

Dimostrazione

$2 \Rightarrow 3$ Se F è proprio allora $[0]_F \neq [1]_F$. Inoltre, per 2, per ogni $a \in A$ o $[a] = 1$ (se $a \in F$) o $[a] = 0$ (se $\neg a \in F$).

$3 \Rightarrow 1$ Se F non fosse massimale, esisterebbe un filtro G tale che $F \subset G \subset A$. Prendiamo $b \in G \setminus F$, allora $[b]_F \neq 1$ perché $b \notin F$, inoltre $[b]_F \neq 0$ perché $G \neq A$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$. Ovviamente $\bigcup \mathcal{C}$ è non vuoto ed estende F.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$. Ovviamente $\bigcup \mathcal{C}$ è non vuoto ed estende F. Se $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$ allora esistono $H, K \in \mathcal{C}$ tali che $a \in H$ e $b \in K$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena, possiamo assumere $H \subseteq K$, quindi $a, b \in K$ e dunque $a \wedge b \in \bigcup \mathcal{C}$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$. Ovviamente $\bigcup \mathcal{C}$ è non vuoto ed estende F. Se $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$ allora esistono $H, K \in \mathcal{C}$ tali che $a \in H$ e $b \in K$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena, possiamo assumere $H \subseteq K$, quindi $a, b \in K$ e dunque $a \wedge b \in \bigcup \mathcal{C}$. Similmente se $a \bigcup \mathcal{C}$ e $b \geq a$, allora $b \in \bigcup \mathcal{C}$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$. Ovviamente $\bigcup \mathcal{C}$ è non vuoto ed estende F. Se $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$ allora esistono $H, K \in \mathcal{C}$ tali che $a \in H$ e $b \in K$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena, possiamo assumere $H \subseteq K$, quindi $a, b \in K$ e dunque $a \wedge b \in \bigcup \mathcal{C}$. Similmente se $a \bigcup \mathcal{C}$ e $b \geq a$, allora $b \in \bigcup \mathcal{C}$. Infine, ovviamente $c \notin \bigcup \mathcal{C}$.

Filtri massimali

Teorema

Se F è un filtro proprio di un'algebra di Boole A e $c \notin F$, esiste un filtro massimale U di A che estende F, cioè $F \subseteq U$, ma non contiene c.

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei filtri propri di A che estendono F ma non contengono c, ordinato dall'inclusione. Ovviamente $\mathcal{A}$ è non vuoto, perché $F \in \mathcal{A}$. Mostriamo che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ ha un maggiorante: $\bigcup \mathcal{C}$. Ovviamente $\bigcup \mathcal{C}$ è non vuoto ed estende F. Se $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$ allora esistono $H, K \in \mathcal{C}$ tali che $a \in H$ e $b \in K$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena, possiamo assumere $H \subseteq K$, quindi $a, b \in K$ e dunque $a \wedge b \in \bigcup \mathcal{C}$. Similmente se $a \bigcup \mathcal{C}$ e $b \geq a$, allora $b \in \bigcup \mathcal{C}$. Infine, ovviamente $c \notin \bigcup \mathcal{C}$. Dunque è possibile applicare il lemma di Zorn per ottenere un filtro massimale che estende F. $\square$

Conseguenze del lemma dell'ultrafiltro

Teorema (di rappresentazione di Stone)

Per ogni algebra di Boole A esiste un insieme X tale che A sia una sottalgebra di $\wp(X)$.

Dimostrazione

Prendiamo come X l'insieme dei filtri massimali di A. Vogliamo controllare che A sia immergibile in $\wp(X)$. Consideriamo la funzione

$$e\colon a \in A \longmapsto \{F \text{ filtro massimale di } A \mid a \in F\}.$$

e è iniettiva: infatti per ogni $1 \neq a \in A$ c'è un filtro massimale che non contiene a, basta considerare il filtro generato da $\neg a$ ed estenderlo ad un filtro massimale.

Conseguenze del lemma dell'ultrafiltro

Dimostrazione.

e è un omomorfismo. Per esempio

$$\begin{aligned} e(a \vee b) &= \{F \text{ filtro massimale di } A \mid a \vee b \in F\} \\ &= \{F \text{ filtro massimale di } A \mid a \in F \text{ o } b \in F\} \\ &= \{F \text{ filtro massimale di } A \mid a \in F\} \\ &\qquad \cup \{F \text{ filtro massimale di } A \mid b \in F\} \\ &= e(a) \vee e(b). \end{aligned}$$

$\square$

Rappresentazioni sottodirette

Definizione

Un'algebra A è un **prodotto sottodiretto** di una famiglia di algebre $\{B_i \mid i \in I\}$ se A si immerge nel prodotto

$$\iota \colon A \to \prod_{i \in I} B_i$$

e, dette

$$\pi_i \colon \prod_{i \in I} B_i \to B_i$$

le proiezioni canoniche, si ha che $\pi_i \circ \iota$ è suriettiva.

Corollario

Ogni algebra di Boole è prodotto sottodiretto di copie di $\{0, 1\}$.

Algebre libere

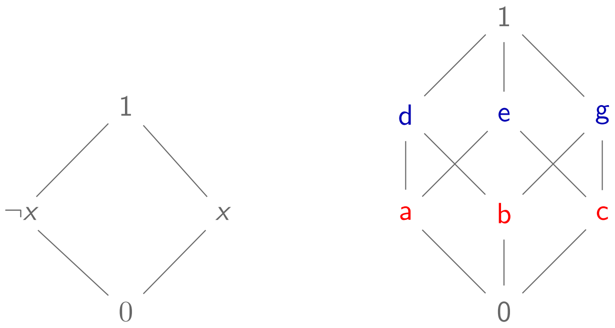
Definizione

Sia A un'algebra di Boole e sia $X \subseteq A$ un suo sottoinsieme che la genera. L'algebra A è detta liberamente generata da X (gli elementi di X sono detti generatori liberi) se,

per ogni algebra di Boole B, ogni funzione da X in B si estende univocamente ad un omomorfismo da A in B.

Esempio

L'algebra a sinistra è l'algebra libera generata da $\{x\}$, infatti data una qualsiasi algebra di Boole B, l'assegnazione di x a un elemento di B si estende univocamente ad un omomorfismo di algebre di Boole.



Algebre libere

Le algebre libere hanno un'importante proprietà

Teorema

Sia $t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)$ *un'equazione nel linguaggio delle algebre di Boole. L'equazione*

$$t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)$$

è valida nell'algebra libera generata da $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *se, e soltanto se, è valida in tutte le algebre di Boole.*

Dimostrazione

Un'implicazione è ovvia. Per l'altra, supponiamo che $t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)$ fallisca in qualche algebra di Boole A. Questo vuol dire che esistono $a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che l'uguaglianza $t^A(a_1, \ldots, a_n) = s^A(a_1, \ldots, a_n)$ non è valida in A.

Algebre libere

Dimostrazione.

Consideriamo l'assegnazione $x_i \mapsto a_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Essa si estende ad un omomorfismo $f\colon \mathtt{Free}(X) \to A$. Essendo un omomorfismo, f è tale che

$$\begin{aligned} f\big(t^{\mathtt{Free}(X)}(x_1, \dots, x_n)\big) &= t^A(f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ &= t^A(a_1, \dots, a_n). \\ f\big(s^{\mathtt{Free}(X)}(x_1, \dots, x_n)\big) &= s^A(f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ &= s^A(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Quindi $t^{\mathtt{Free}(X)}(x_1, \dots, x_n)$ e $s^{\mathtt{Free}(X)}(x_1, \dots, x_n)$ devono essere diversi anche in $\mathtt{Free}(X)$, ergo l'equazione fallisce in $\mathtt{Free}(X)$. $\square$

L'algebra di Lindenbaum-Tarski

Sia $\texttt{Form}$, l'insieme delle formule proposizionali considerato all'inizio e sia Γ un suo sottoinsieme coerente. Definiamo una relazione di equivalenza come segue:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

È possibile dotare il quoziente $\texttt{Form}/\equiv_\Gamma$ della struttura di algebra di Boole definendo

$$\begin{gathered}
0 := [\bot]_{\equiv_\Gamma} \qquad 1 := [\top]_{\equiv_\Gamma} \\
[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \wedge [\psi]_{\equiv_\Gamma} := [\varphi \wedge \psi]_{\equiv_\Gamma}, \\
[\varphi]_{\equiv_\Gamma} \vee [\psi]_{\equiv_\Gamma} := [\varphi \vee \psi]_{\equiv_\Gamma}, \\
\neg[\varphi]_{\equiv_\Gamma} := [\neg\varphi]_{\equiv_\Gamma}.
\end{gathered}$$

Le operazioni sono ben definite perché in effetti, $\equiv_\Gamma$ è una congruenza. (Esercizio). Chiameremo $\texttt{LT}_\Gamma(\texttt{PVar})$ l'algebra qui definita.

L'algebra di Lindenbaum-Tarski

Ha senso anche considerare formule in un numero limitato di variabili. Se P è un sottoinsieme di $\mathtt{PVar}$, indichiamo con $\mathtt{Form}(P)$ l'insieme delle formule proposizionali le cui variabili appartengono a P.

Teorema

L'algebra di Lindenbaum-Tarski $\mathtt{LT}_{\emptyset}(P)$ è l'algebra libera generata da P.

Dimostrazione

Iniziamo notando che l'insieme che genera $\mathtt{LT}_{\emptyset}(P)$ è in effetti $[P] := \{[p]_{\equiv_\emptyset} \mid p \in P\}$. La dimostrazione è una semplice induzione.

Sia f un'assegnazione da P in un'algebra di Boole A.

L'algebra di Lindenbaum-Tarski

Dimostrazione

Definiamo per induzione una funzione $\tilde{f}\colon \mathrm{LT}_{\emptyset}(P) \to A$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}([p]) &:= f(p) \text{ per ogni } p \in P,\\
\tilde{f}([\bot]) &:= 0^A \text{ e } \tilde{f}([\top]) := 1^A,\\
\tilde{f}([\neg\varphi]) &:= \neg^A \tilde{f}(\varphi),\\
\tilde{f}([\varphi \vee \psi]) &:= \tilde{f}(\varphi) \vee^A \tilde{f}(\psi)\\
\tilde{f}([\varphi \wedge \psi]) &:= \tilde{f}(\varphi) \wedge^A \tilde{f}(\psi).
\end{aligned}
$$

Ovviamente $\tilde{f}$ è un omomorfismo.

L'algebra di Lindenbaum-Tarski

Proposizione

Sia F un filtro di $\mathrm{LT}_\Gamma(\mathtt{PVar})$ *e* $\Delta = \bigcup F$. *Allora* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e*

$$\mathrm{LT}_\Gamma(\mathtt{PVar})/F \cong \mathrm{LT}_\Delta(\mathtt{PVar}).$$

Dimostrazione.

Il fatto che $\Gamma \subseteq \Delta$ segue direttamente da $\Gamma \subseteq [\top]_\Gamma$. Per quanto riguarda l'isomorfismo,

$$\begin{aligned} [[\varphi]_\Gamma]_F = [[\psi]_\Gamma]_F \text{ se, e soltanto se, } & [\varphi]_\Gamma \leftrightarrow [\psi]_\Gamma \in F \\ \text{se, e soltanto se, } & [\varphi \leftrightarrow \psi]_\Gamma \in F \\ \text{se, e soltanto se, } & \varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta \\ \text{se, e soltanto se, } & [\varphi]_\Delta = [\psi]_\Delta. \end{aligned}$$

Quindi la mappa $[[\psi]_\Gamma]_F \mapsto [\varphi]_\Delta$ è un omomorfismo, ben definito e biettivo. $\square$

Traduzioni

In queste slide tre oggetti matematici diversi sono denotati dallo stesso simbolo

$$\wedge, \vee, \neg \text{ denotano } \begin{cases} \text{connettivi logici,} \\ \text{simboli di operazione,} \\ \text{operazioni concrete.} \end{cases}$$

Le formule in $\mathtt{Form}$ possono essere trasformate in termini in $\mathtt{Term}$ e viceversa.

$$\begin{aligned} \text{Se } p_i \in \mathtt{PVar}, &\qquad p_i^T := x_i, \\ \text{Se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2, &\qquad \varphi^T := \varphi_1^T \wedge \varphi_2^T \\ \text{Se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2, &\qquad \varphi^T := \varphi_1^T \vee \varphi_2^T \\ \text{Se } \varphi = \neg\varphi_1, &\qquad \varphi^T := \neg\varphi_1^T. \end{aligned}$$

Se t è un termine indicheremo con t^L la corrispondente formula proposizionale.

Traduzioni

Tramite le precedenti traduzioni è possibile trasformare formule proposizionali in equazioni e viceversa:

$$\text{Se } \varphi \text{ è una formula, definiamo } \varphi^{=} \text{ come } \varphi^{T} = 1,$$
$$\text{Se } s = t \text{ è un'equazione, definiamo } (s = t)^{\leftrightarrow} \text{ come } s^{L} \leftrightarrow t^{L}.$$

Completezza algebrica

Al teorema di completezza visto all'inizio

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma \models \varphi$$

si aggiunge ora un passo intermedio

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma^{=} \models_{BA} \varphi^{=} \text{ se, e soltanto se, } \Gamma \models \varphi$$

Completezza algebrica: dimostrazione 1

Cominciamo con il dimostrare

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma^{=} \models_{BA} \varphi^{=}.$$

Dimostrazione

$\boxed{\Rightarrow}$ Per induzione sulla lunghezza della derivazione di φ.

- Se la derivazione ha lunghezza 1, allora $\varphi \in \Gamma$ oppure φ è un assioma. Nel primo caso banalmente $\Gamma^{=} \models_{BA} \varphi^{=}$. Nel secondo caso si mostra che tutti gli assiomi sono validi in BA.
- Per i passi induttivi, bisogna verificare che ogni regola del calcolo $\vdash$ è valida nella teoria delle algebre di Boole.

Completezza algebrica: dimostrazione 2

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \Gamma^{=} \models_{BA} \varphi^{=}.$$

Dimostrazione.

$\boxed{\Leftarrow}$ Proviamo la contronominale. Supponiamo che $\Gamma \nvdash \varphi$ e mostriamo che esiste un'algebra di Boole A e un'interpretazione e in A tale che $e[\Gamma] = 1$ e $e[\varphi] \neq 1$. Basta prendere per A l'algebra di Lindenbaum-Tarski LT_Γ e l'interpretazione che manda ogni x_i in $[p_i]_\Gamma$. Tale interpretazione manda φ^T in $[f]_\Gamma$, quindi rende valide tutte le equazioni in $\Gamma^{=}$, perché tutti i termini in Γ^T vengono interpretati in elementi del filtro generato da Γ. Inoltre LT_Γ non verifica $\varphi^{=}$, perché φ non appartiene al filtro generato da $[\Gamma]$. $\square$

Completezza algebrica: dimostrazione 2

Ora passiamo a $\Gamma^{=} \models_{BA} \varphi^{=}$ se, e soltanto se, $\Gamma \models \varphi$.

Dimostrazione.

$\boxed{\Rightarrow}$ È banale, perché $\Gamma \models \varphi$ equivale a dire che ogni omomorfismo $f\colon \mathtt{Free}(\omega) \to \{0,1\}$ che manda $[\Gamma]$ in 1 deve mandare anche $[\varphi]$ in 1.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $f\colon \mathtt{Free}(\omega) \to A$ sia un omomorfismo che manda $[\Gamma]$ in 1. L'algebra A è prodotto sottodiretto di I copie di $\{0,1\}$, quindi componendo f con ogni proiezione, otteniamo I omomorfismi $f_i\colon \mathtt{Free}(\omega) \to \{0,1\}$. Poiché $f[[\Gamma]] = 1$, per ogni $i \in I$, $\pi_i(f([\Gamma])) = 1$, dunque per ipotesi, anche $\pi_i(f([\varphi])) = 1$. Ma allora $f[\varphi] = 1$ e siccome ciò vale per un arbitrario f, abbiamo $A \models \varphi^{=}$. $\square$