Algebra della Logica

Terza lezione

Luca Spada

Dipartimento di Matematica
Università di Salerno
http://logica.dmi.unisa.it/lucaspada

Scuola AILA 2017
Palazzo Feltrinelli, Gargnano, 20–26 agosto 2017.

Relazioni di conseguenza

Dato un insieme di formule $\mathtt{Form}$ su un linguaggio fissato $\mathcal{L}$, una **relazione di conseguenza** su $\mathtt{Form}$ è una relazione $\vdash \subseteq \wp(\mathtt{Form}) \times \mathtt{Form}$ con le seguenti proprietà:

1. $\varphi \vdash \varphi$ (riflessività)
2. Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $\Delta \vdash \varphi$ (monotonia)
3. Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta \vdash \gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ allora $\Delta \vdash \varphi$ (transitività)

Una relazione di conseguenza $\vdash$ è detta

- **invariante per sostituzioni** se ogni volta che $\Gamma \vdash \varphi$ e σ è una sostituzione, allora $\sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$
- **finitaria** se ogni volta che $\Gamma \vdash \varphi$ esiste $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tale che $\Delta \vdash \varphi$.

Una **logica** è relazione di conseguenza invariante per sostituzioni.

Operatori di chiusura

Una maniera alternativa di trattare le relazioni di conseguenza è pensare la conseguenza logica come un operatore che, dato un insieme di formule, restituisce l'insieme di tutto ciò che è derivative dal primo.

Un operatore di chiusura su $\mathtt{Form}$ è una mappa $C \colon \wp(\mathtt{Form}) \to \wp(\mathtt{Form})$ tale che:

1. $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$,
2. Se $\Gamma \subseteq \Delta$ allora $C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$
3. $C(C(A)) = C(A)$.

Un operatore di chiusura è detto strutturale se per ogni sostituzione σ vale

- $\sigma[C(\Gamma)] \subseteq C(\sigma[\Gamma])$.

Equivalenza dei due concetti

Relazioni di conseguenza e operatori di chiusura sono due facce della stessa medaglia. Infatti, se $\vdash$ è una relazione di conseguenza è possibile definire

$$C_{\vdash}(\Gamma) := \{\varphi \in \texttt{Form} \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$

È facile vedere che la mappa $C_{\vdash}$ è un operatore di chiusura. Viceversa, se C è un operatore di chiusura, possiamo definire la relazione

$$\Gamma \vdash_C \varphi \text{ se, e soltanto se, } \varphi \in C(\Gamma).$$

Anche in questo caso è facile vedere che $C_{\vdash}$ è un operatore di chiusura.

Esercizio

Mostrare che l'essere strutturale e l'essere invariate per sostituzioni sono proprietà corrispondenti nel passare da operatori di chiusura a relazioni di conseguenza e viceversa.

Esempio

Sia BA la classe delle algebre di Boole. Definiamo

$$\Gamma \vdash_{BA} \varphi \Leftrightarrow \text{per ogni } A \in BA \text{ ed } e\colon \mathtt{Term} \to A$$
$$\text{se, per ogni } \gamma \in \Gamma, e(\gamma) = 1, \text{ allora } e(\varphi) = 1.$$

Con questa definizione $\vdash_{BA}$ è una relazione di conseguenza. Come abbiamo già visto è proprio $\vdash$.

Matrici

Una **matrice** (logica) è una coppia (A, F), dove A è un'algebra e $F \subseteq A$.

Osservazione

Ogni classe di matrici $\mathcal{M}$ induce una logica.

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash_{\mathcal{M}} \varphi \Leftrightarrow & \text{ per ogni } (A, F) \in \mathcal{M} \text{ ed } e\colon \mathtt{Term} \to A \\ & \text{ se, per ogni } \gamma \in \Gamma, e(\gamma) \in F, \text{ allora } e(\varphi) \in F.\end{aligned}$$

Viceversa, se $\vdash$ è una logica, diremo che una matrice (A, F) è un **modello** di $\vdash$ se

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow & \text{ per ogni } e\colon \mathtt{Term} \to A \\ & \text{ se, per ogni } \gamma \in \Gamma, e(\gamma) \in F, \text{ allora } e(\varphi) \in F.\end{aligned}$$

Logiche e modelli

Indichiamo $\mathtt{Mod}(\vdash) := \{(A, F) \mid (A, F) \text{ è un modello di } \Gamma\}$

Osservazione

Ogni logica è completa rispetto alla classe dei suoi modelli. In simboli:

$$\vdash \quad = \quad \vdash_{\mathtt{Mod}(\vdash)} .$$

Il problema è che la classe $\mathtt{Mod}(\vdash)$ contiene troppe matrici, per esempio $(A, A) \in \mathtt{Mod}(\vdash)$ per ogni algebra A nel linguaggio appropriato.

La congruenza di Leibniz

Definizione

Se (A, F) è una matrice, definiamo la congruenza di Leibniz di F su A come l'insieme

$$(a, b) \in \Omega_A F \quad \textbf{sse} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathtt{Form} \text{ e } c_1, \ldots, c_n \in A$$
$$\varphi(a, c_1, \ldots, c_n) \in F \Leftrightarrow \varphi(b, c_1, \ldots, c_n) \in F.$$

Una matrice è detta ridotta se la sua congruenza di Leibniz è l'identità.

Per passare da una matrice (A, F) alla sua ridotta, basta dunque considerare il quoziente

$$(A/\Omega_A F,\ F/\Omega_A F)$$

dove $F/\Omega_A F := \{[x] \in A/\Omega_A F \mid x \in F\}$.

La congruenza di Leibniz

La precedente definizione ha senso perché la congruenza di Leibniz soddisfa la seguente proprietà

$$\text{Se } a \in F \text{ e } (a, b) \in \Omega_A F \text{ allora } b \in F.$$

In effetti, la congruenza di Leibniz può essere caratterizzata come la più grande congruenza con la proprietà qui sopra (detta compatibilità con F).

Completezza rispetto alle matrici

La classe di tutti modelli ridotti di una logica $\vdash$ è indicata con $\mathtt{Mod}^*_\vdash$.

Teorema

Ogni logica $\vdash$ coincide con la logica data dalla classe dei suoi modelli ridotti. In simboli:

$$\vdash \quad = \quad \vdash_{\mathtt{Mod}^*_\vdash}.$$

Conseguenze equazionali

Definizione

Sia K una classe di algebre e $\Psi \cup \{s = t\}$ un insieme di equazioni.

$$\Psi \models_K s = t \text{ sse } \begin{array}{l} \text{per ogni } A \in K \text{ ed } e\colon \mathtt{Term} \to A \\ \text{se, per ogni } u = v \in \Gamma, e(u) = e(v), \\ \text{allora } e(s) = e(t). \end{array}$$

La relazione $\models_K$ è detta conseguenza equazionale relativa a K.

Quasi-equazioni e quasi-varietà

Una quasi-equazione è una formula del primo ordine della forma

$$\bigwedge_{i \in I} u_i = v_i \longrightarrow s = t$$

(I è un insieme finito).

Teorema

Se K è una classe di algebre le seguenti sono equivalenti:

1. *K è la classe di modelli di una teoria quasi-equazionale.*
2. *K è chiusa per isomorfismi, sottoalgebre, prodotti diretti e ultraprodotti: $K = \mathbb{ISPP}_U(K)$.*

Se le precedenti condizioni valgono per K allora è detta quasi-varietà.

Semantiche algebriche

Definizione

Data una logica $\vdash$ e una classe di algebre K, diremo che K è una semantica algebrica per $\vdash$ se esiste un sistema finito di equazioni

$$\{s_i(p) = t_i(p) \mid i \leqslant n\},$$

in una singola variabile tale che per ogni insieme di formule $\Gamma \cup \{\varphi\}$,

$\Gamma \vdash \varphi$ **sse**

$$\{s_i(\gamma/p) = t_i(\gamma/p) \mid i \leqslant n \text{ e } \gamma \in \Gamma\} \vDash_K s_i(\varphi/p) = t_i(\varphi/p),$$

per ogni $i \leqslant n$.

Esempio

Definizione

Sia $\vdash_{CL}$ la logica proposizionale classica BA la classe delle algebre di Boole. Prendiamo come sistema di termini $\{s_i(p) = t_i(p) \mid i \leqslant n\}$, la singola equazione

$$p = 1.$$

Allora abbiamo già visto che

$$\Gamma \vdash_{CL} \varphi \textbf{ sse } \{\gamma = 1 \mid \gamma \in \Gamma\} \vDash_{BA} \varphi = 1.$$

Problemi delle semantiche algebriche

- Ci sono logiche che non ammettono una semantica algebrica. Ad esempio la logica il cui unico assioma è $\varphi \to \varphi$ e la cui unica regola è il modus ponens.
- La stessa logica può avere più d'una semantica algebrica. Ad esempio, per l'interpretazione di Glivenko la logica classica ammette anche la varietà delle algebre di Heyting come semantica algebrica, prendendo come equazioni definitorie $\neg\neg p = 1$.
- Ci sono logiche diverse con la stessa semantica algebrica. Ad esempio, le algebre di Heyting formano una semantica algebrica per la logica intuizionista e per la logica classica.
- Il rapporto tra sintassi e semantica è asimmetrico.

Logiche algebrizzabili

Definizione

Una logica $\vdash$ è detta algebrizzabile se esiste una quasi-varietà K e delle trasformazioni

$$\text{un insieme di equazioni } \tau(p) := \{s_i(p) = t_i(p) \mid i \leqslant n\}$$
$$\text{un insieme di formule } \rho(\alpha, \beta) := \{\eta_j(\alpha, \beta) \mid j \leqslant m\}$$

tali che

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e soltanto se, } \tau(\Gamma) \vDash_K \tau(\varphi),$$
$$\rho(\Psi) \vdash \rho(s,t) \text{ se, e soltanto se, } \Psi \vDash_K s = t,$$
$$s = t \;\; \dashv\vDash_K \tau\rho(s,t),$$
$$\varphi \dashv\vdash \rho(\tau(\varphi)).$$

Esempi

Esempio

Nel caso della logica classica abbiamo visto che

$$\tau = \varphi \longmapsto \varphi^T = 1$$
$$\rho = s = t \longmapsto s^L \leftrightarrow t^L$$

Teorema

*Se $\vdash$ è algebrizzabile da una classe di algebre K, allora la quasi-varietà generata da K è l'unica quasi-varietà che algebrizza $\vdash$. Essa è detta "la" **semantica algebrica equivalente** di $\vdash$.*

Definibilità della congruenza di Leibniz

Teorema

Consideriamo una logica $\vdash$ e un insieme di formule $\rho(p, q)$ in due variabili proposizionali. Le seguenti sono equivalenti:

1. $(a, b) \in \Omega_A F$ *se, e soltanto se,* $\rho(a, b) \subseteq F$.
2. *Valgono le seguenti conseguenze:*

$$\begin{aligned} &\vdash \rho(x, x) \\ x, \rho(x, y) &\vdash y \\ \bigcup_{i \leqslant n} \rho(x_i, y_i) &\vdash \rho(f(x_i), f(y_i)) \end{aligned}$$

per tutte le funzioni f nel linguaggio.

Caratterizzazione sintattica della algebrizzabilità

Teorema

Una logica $\vdash$ è algebrizzabile se, e soltanto se, esistono

- *un insieme di equazioni in una variabile:* $\tau(x)$
- *un insieme di formule in due variabili:* $\rho(p, q)$,

tali che

$$\vdash \rho(x, x)$$

$$x, \rho(x, y) \vdash y$$

$$\bigcup_{i \leqslant n} \rho(x_i, y_i) \vdash \rho(f(x_i), f(y_i)) \text{ per ogni } f \in \mathtt{Term},$$

$$\rho\tau(x) \dashv\vdash x.$$

Conseguenze

Corollario

1. *La semantica algebrica equivalente di una logica algebrizzabile $\vdash$ è data da*

$$\{A \mid \exists F \subseteq A, \quad (A, F) \in \mathtt{Mod}^*(\vdash)\}.$$

2. *Se $\vdash$ è algebrizzata da K c'è un anti-isomorfismo tra i reticoli completi delle estensioni di $\vdash$ e le sotto-quasi-varietà di K.*
3. *L'algebrizzabilità è preservata nel prendere estensioni di una logica.*

Filtri deduttivi

Definizione

Data una logica $\vdash$ e un'algebra A. Un insieme $F \subseteq A$ è un **filtro deduttivo** se $(A, F) \in \mathtt{Mod}(\vdash)$.

L'insieme di tutti i filtri deduttivi di A,

$$\mathtt{Fil}_{\vdash}(A) := \{F \subseteq A \mid (A, F) \in \mathtt{Mod}(\vdash)\}$$

è un reticolo completo.

Osservazione

$\mathtt{Fil}_{\vdash}(\mathtt{Form})$ coincide con le teorie di $\vdash$, cioè gli insiemi chiusi di $C_{\vdash}$.

Caratterizzazione semantica della algebrizzabilità

Teorema

Siano $\vdash$ una logica e K una quasi-varietà. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

1. *$\vdash$ è algebrizzabile e la sua semantica algebrica equivalenti è K.*
2. *Per ogni algebra A c'è un isomorfismo di reticoli $i_A \colon \mathtt{Fil}_{\vdash}(A) \to \mathtt{Con}_K(A)$ che commuta con le sostituzioni, $i_A\sigma^{-1}(F) = \sigma^{-1}i_A(F)$ per ogni $F \in \mathtt{Fil}_{\vdash}(A)$.*

Inoltre, i_A può essere sempre preso come

$$\Omega_A \colon \mathtt{Fil}_{\vdash}(A) \to \mathtt{Con}_K(A).$$