Esercizi di Logica Matematica

Raccolti da Marco Abbadini

16 gennaio 2025

1 Logica Proposizionale

Esercizio 1.1. Stabilire la complessità delle seguenti formule:

1. $(((\neg p) \wedge q) \wedge (\neg q))$
2. $((p \wedge q) \wedge (r \wedge s))$
3. $((p \wedge q) \wedge (\neg r))$

Esercizio 1.2. Per ognuna delle seguenti proposizioni stabilire, usando le tavole di verità, se essa è una tautologia, contraddizione o è soddisfacibile.

1. $\neg(A \to A)$
2. $A \to (B \vee A)$
3. $(A \vee B) \to (\neg A \wedge C)$
4. $A \to B$
5. $(A \leftrightarrow A) \to (B \leftrightarrow \neg B)$
6. $P \to P$
7. $\bot \to P$
8. $(\neg P \to P) \to P$
9. $\neg\neg P \to P$
10. $P \to \neg\neg P$
11. $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \to \neg Q)$

12. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
13. $(P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

Esercizio 1.3. Stabilire quali dei seguenti insiemi di formule è soddisfacibile.

1. $\{A \rightarrow B, (A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)\}$
2. $\{C \rightarrow B, A \vee \neg C, \neg(C \wedge A), C\}$
3. $\{a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow \neg a\}$
4. $\{a_0 \rightarrow b_0, a_0 \wedge a_1 \rightarrow b_0 \vee b_1, a_0 \wedge a_1 \wedge a_2 \rightarrow b_0 \vee b_1 \vee b_2, \dots\}$
5. $\{\neg(\neg B \vee A), A \vee \neg C, B \rightarrow \neg C\}$
6. $\{\neg a \wedge b \rightarrow c, a \rightarrow (\neg a \rightarrow b), a \leftrightarrow \neg b\}$

Esercizio 1.4. Usando le tavole di verità, stabilire se le seguenti conseguenze logiche sono corrette:

1. $p \vee q \models p \wedge q$
2. $p \wedge q \models p \vee q$
3. $p \rightarrow q \wedge r \models (p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $p \vee (\neg q \wedge r) \models (q \vee \neg r) \rightarrow p$
5. $p \rightarrow \neg p \models p$
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \models (p \rightarrow q) \rightarrow r$
7. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$
8. $\models p$

1.1 Riduzione a Forma Normale

Esercizio 1.5. Per ognuna delle seguenti formule proposizionali, scriverne una equivalente in forma normale congiuntiva e una equivalente in forma normale disgiuntiva (alcune formule potrebbero già essere scritte in una di queste forme):

1. $\neg a \leftrightarrow b$
2. $a \wedge (b \vee c)$

3. $((a \vee b) \wedge c) \vee d$

4. $a \vee b$

5. $(a \vee b) \rightarrow c$

6. $a \wedge (a \rightarrow b)$

7. $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

8. $(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$

9. $\neg(a \rightarrow b) \vee (\neg a \wedge c)$

10. $a \leftrightarrow ((b \wedge \neg a) \vee c)$

11. $(a \vee b) \wedge (\neg b \vee c)$

12. $\neg a \vee (b \rightarrow \neg c)$

13. $(a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$

14. $(a \vee b) \leftrightarrow \neg c$

15. $\neg(\phi \leftrightarrow \psi)$

16. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

17. $(\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\psi)) \wedge (\psi \rightarrow (\psi \wedge \neg\phi))$

1.2 Qualche Indovinello

Segnaliamo alcuni indovinelli collegati alla logica proposizionale. Provare a risolverli non è un modo efficiente per prepararsi all'esame, ma è più divertente.

Esercizio 1.6. Uno stato è abitato solamente da:

1. **Veritieri**: persone che dicono sempre la verità,

2. **Bugiardi**: persone che mentono sempre.

Inoltre, gli abitanti rispondono solo a domande con risposta sì o no. Un turista arriva a un bivio dove una strada porta alla capitale e l'altra no. Non c'è alcuna indicazione, ma c'è un nativo al bivio. Quale domanda potrebbe fare il turista per determinare quale strada prendere?

Suggerimento: Sia P :=“Sei un veritiero.” e Q :=“Il bivio di sinistra porta alla capitale.”. Costruire, con l'aiuto di una tavola di verità, una formula proposizionale ϕ con lettere P e Q tale che la risposta del nativo alla domanda “ϕ?” sia “sì” se e solo se Q è vera.

Esercizio 1.7. Un turista si reca in uno stato i cui abitanti parlano una lingua in cui le parole “sì” e “no” si dicono “ja” e “da”. Tuttavia, il turista non sa quale termine corrisponde a “sì” e quale a “no”. Gli abitanti capiscono la lingua del turista ma rispondono sempre nella loro lingua. Arrivato a un bivio con un nativo presente, il turista deve determinare quale strada porta alla capitale.

Suggerimento: Sia R :=“Il termine ‘ja’ corrisponde a ‘sì’.” e S :=“Il bivio di sinistra porta alla capitale.”. Costruire, con una tavola di verità, una formula ψ tale che la risposta del nativo a “ψ?” sia “ja” se e solo se S è vera.

Esercizio 1.8. In uno stato, ci sono due tipi di persone:

1. **Veritieri**: dicono sempre la verità,
2. **Imprevedibili**: rispondono in modo casuale, vero o falso.

Un turista si trova a un bivio con tre nativi: Valerio, Marco e Ivo. Egli sa che:

1. Due di loro sono veritieri,
2. Uno è imprevedibile,
3. Non conosce chi sia chi.

Ponendo tre domande con risposta sì o no, il turista deve stabilire il nome di ciascun nativo.

Nota: Non è necessario rivolgersi a persone diverse per ciascuna domanda; si può decidere la domanda e l'interlocutore in base alle risposte precedenti.

Esercizio 1.9. L'indovinello più difficile del mondo, secondo Wikipedia `https://it.wikipedia.org/wiki/L'indovinello_pi_difficile_del_mondo`.

Tre oracoli divini A, B e C sono chiamati, in un ordine sconosciuto:

1. **Verace**: dice sempre il vero,
2. **Mendace**: dice sempre il falso,

3. **Imprevedibile**: risponde in modo casuale.

L'obiettivo è determinare l'identità di ciascun oracolo ponendo loro tre domande, ciascuna con risposta sì o no. Gli oracoli rispondono sempre nella loro lingua usando i termini "da" e "ja". Non si sa quale termine corrisponda a "sì" e quale a "no".

Suggerimento: La soluzione è simile all'esercizio 1.8, ma ogni domanda va modificata come nell'esercizio 1.6 e nell'esercizio 1.7.

2 Algebre di Boole

Esercizio 2.1. Sia $n = p_1 \dots p_k \in \mathbb{N}$ prodotto di primi distinti $p_1, \dots, p_k$. Sia $D = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ divide } n\}$. Per ogni $a \in D$, sia $a := \frac{n}{a}$. Mostrare che $(D, \text{gcd}, \text{mcm}, 1, n)$ è un'algebra di Boole. Si trovi un insieme X ed un isomorfismo tra $P(X)$ e D.

Esercizio 2.2. Mostrare che l'insieme $\{m \in D \mid m \text{ divide } 4\}$ ordinato per divisibilità non è un'algebra di Boole.

Esercizio 2.3. Sia X un insieme infinito. Sia $B := \{Y \subseteq X \mid Y \text{ è finito oppure cofinito}\}$. Dimostrare che B è una sottalgebra dell'algebra di Boole di $P(X)$.

Esercizio 2.4.

1. Esibire un'algebra di Boole di 16 elementi.
2. Esibire un'algebra di Boole di cardinalità del continuo.
3. Esibire un'algebra di Boole di cardinalità numerabile.
4. È vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'algebra di Boole di cardinalità n?
5. Mostrare che, per ogni cardinale infinito κ, esiste un'algebra di Boole di cardinalità κ.
6. È vero che ogni insieme infinito può essere dotato della struttura di algebra di Boole?

Esercizio 2.5. Sia $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole. Dimostrare che la funzione $\varphi : \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle \to \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0\rangle$, definita da $x \mapsto \neg x$, è un isomorfismo di algebre di Boole. È un automorfismo?

Esercizio 2.6.

1. Trovare un esempio di poset non reticolo.

2. Trovare un esempio di reticolo limitato distributivo non complementato.

3. Trovare un esempio di reticolo distributivo non limitato.

4. Trovare un esempio di reticolo limitato complementato non distributivo.

Esercizio 2.7. Se un sottoinsieme B di un'algebra di Boole A contiene 0 e 1 ed è chiuso per $\wedge$ e $\vee$, ne segue che B è una sottalgebra di A?

Esercizio 2.8. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in A ma non in B.

Esercizio 2.9. Dare un esempio di sottalgebra B di un'algebra di Boole A e un sottoinsieme E di B tale che E ha un sup in B ma non in A.

3 Omomorfismi, Congruenze, Filtri e Ultrafiltri

Esercizio 3.1. Sia X un insieme, e sia Y un suo sottoinsieme. Si mostri che la funzione

$$\pi : P(X) \to P(Y), \quad A \mapsto A \cap Y$$

è un omomorfismo suriettivo. Qual è il kernel di π? La funzione

$$\iota : P(Y) \to P(X), \quad A \mapsto A$$

è un omomorfismo?

Esercizio 3.2. Si mostri che il kernel di un omomorfismo $f : A \to B$ di algebre di Boole è un filtro proprio se e solo se B non è un singoletto.

Esercizio 3.3. Siano $f, g : A \to B$ omomorfismi con lo stesso kernel. Segue che f e g sono uguali?

Esercizio 3.4. Sia X un insieme. Definisca la relazione $\sim$ su $P(X)$ come segue: $A \sim B$ se e solo se A e B differiscono su al più un insieme numerabile di elementi, ossia la differenza simmetrica

$$(A \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap B)$$

è al più numerabile. Si dimostri che questa relazione è una congruenza. Se X è numerabile, quanti elementi ha il quoziente $P(X)/\sim$?

Esercizio 3.5. Si stabilisca se la seguente frase è vera o falsa: Se $f : A \to B$ è una funzione da un reticolo A a un reticolo B tale che, per ogni $x, y \in A$, $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$, allora per ogni $x, y \in A$ si ha $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ e $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

4 Algebre atomiche

Esercizio 4.1. Sia B un'algebra di Boole finita, di cardinalità 2^n, dove n è il numero di atomi. Dimostrare che qualunque insieme di $n-1$ atomi di B genera B.

Esercizio 4.2. Siano A un'algebra di Boole, e B una sua sottalgebra (cioè $B \subseteq A$, e B è chiuso per le operazioni booleane). È vero che ogni atomo dell'algebra di Boole B è atomo dell'algebra di Boole A?

Esercizio 4.3. Siano B_1 e B_2 algebre di Boole finite, con $|B_1| = |B_2| = 2^n$. Quanti isomorfismi ci sono da B_1 a B_2?

Esercizio 4.4. Esibire un'algebra atomica che non sia completa (cioè che non ammette sup e inf arbitrari). (Tale algebra non può essere isomorfa a un'algebra delle parti, in quanto queste sono sempre complete.)

Esercizio 4.5. Sia $U := \{a, b, c\}$. Determinare il numero di sottalgebre di $P(U)$.

Esercizio 4.6. Diciamo che un'algebra di Boole A è **densa** se per ogni $x, y \in A$ tali che $x < y$ esiste $z \in A$ tale che $x < z < y$. Si mostri che un'algebra di Boole è densa se e solo se non ha atomi.

5 Algebre di Lindenbaum

Esercizio 5.1. Siano x e y variabili distinte.

1. $[x] = [y]$ in $LT_\emptyset(\{x, y\})$?
2. $\neg([x] \wedge [y]) = \neg[x] \vee \neg[y]$ in $LT_\emptyset(\{x, y\})$?
3. $[x] \wedge [y] = [x]$ in $LT_\emptyset(\{x, y\})$?
4. $[x] \wedge [y] = [x]$ in $LT_{\{x \to y\}}(\{x, y\})$?
5. $[x] \to [y] = [y] \to [x]$ in $LT_{\{x \vee y\}}(\{x, y\})$?
6. $[x] \vee [y] = [x] \wedge [y]$ in $LT_\emptyset(\{x, y\})$?

Esercizio 5.2. Sia P un insieme finito. Si stabilisca il numero di elementi dell'algebra di Lindenbaum-Tarski $LT_\emptyset(P)$ in funzione del numero di elementi di P.

Esercizio 5.3. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme X tale che $|P(X)| = 4$. Si stabilisca il numero di elementi di un insieme P tale che $|LT_\emptyset(P)| = 4$.

Esercizio 5.4. È vero che, per ogni algebra di Boole A finita, esiste un insieme P tale che $A \cong LT_\emptyset(P)$?

Esercizio 5.5. È vero che, per ogni algebra di Boole A, esistono un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali con variabili appartenenti a P tali che $A \cong LT_\Gamma(P)$?

Esercizio 5.6. Sia U un ultrafiltro di un'algebra di Lindenbaum $LT_\emptyset(P)$. Si mostri che, per tutte le formule φ, ψ nelle variabili proposizionali in P:

1. $[\neg\varphi] \in U$ se e solo se $[\varphi] \notin U$.
2. $[\varphi \wedge \psi] \in U$ se e solo se $[\varphi] \in U$ e $[\psi] \in U$.
3. Se $[\varphi], [\varphi \to \psi] \in U$, allora $[\psi] \in U$.

Esercizio 5.7. Qual è l'algebra libera generata dall'insieme vuoto?

Esercizio 5.8. Sia A l'algebra di Boole degenere (cioè A è un singoletto). Mostrare che non esiste alcun sottoinsieme X di A tale che A è liberamente generata da X.

Esercizio 5.9. Si mostri che, per ogni algebra di Boole B, esistono un'algebra libera A e un omomorfismo suriettivo $f : A \to B$.

Esercizio 5.10. Sia A un'algebra di Boole. Si mostri che esiste un insieme P e un insieme Γ di formule proposizionali tali che A è isomorfo a $LT_\Gamma(P)$.

Esercizio 5.11. Trovare un insieme di variabili P e un insieme di formule proposizionali Γ con variabili in P tale che $|LT_\Gamma(P)| = 8$.

Esercizio 5.12. Mostrare che ogni algebra di Boole è isomorfa a $LT_\Gamma(P)$ per qualche P e Γ. (Qui è ammesso prendere Γ incoerente per ottenere l'algebra di Boole di un solo elemento.)

Esercizio 5.13. Sia X un insieme (di variabili proposizionali). Mostrare che i seguenti insiemi sono in biezione:

1. $\{Y \mid Y \subseteq X\}$.
2. $\{\Sigma \mid \Sigma$ insieme massimalmente coerente di formule proposizionali con variabili in $X\}$.
3. $\{U \mid U$ ultrafiltro di $LT_\emptyset(X)\}$.

6 Curiosità

Gli ultrafiltri possono essere usati per rispondere (negativamente) alla seguente domanda: È vero che, per ogni gioco a turni (potenzialmente infiniti) tra due giocatori che preveda in ogni caso un vincitore e uno sconfitto (quindi senza possibilità di pareggiare) e che sia deterministico (cioè non c'è una componente randomica), esiste una strategia vincente per almeno uno dei due giocatori?

La risposta (abbastanza sorprendentemente) è no. Un gioco senza strategie vincenti è il seguente.

Si fissi un ultrafiltro non-principale U di $P(\mathbb{N})$. A turno, il giocatore A e il giocatore B scelgono un numero naturale, con la condizione che esso sia strettamente maggiore di quelli scelti precedentemente. Indicando con a_i l'i-esimo numero scelto da A e con b_i l'i-esimo numero scelto da B, avremo una successione

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < \dots$$

B vince se

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}([a_i + 1, b_i] \cap \mathbb{N}) \in U,$$

altrimenti vince A.

La dimostrazione del fatto che né A né B ha una strategia vincente si basa su un argomento di "rubare la strategia": se A avesse una strategia vincente, allora B potrebbe copiarla per ottenere una strategia vincente per sé (il che è assurdo perché non possono avere entrambi strategie vincenti), e viceversa. Per maggiori dettagli, si veda il libro *Logic in Games* di Johan Van Benthem (2014, M.I.T. Press), esempio 5.1, p. 105.

7 Logica del prim'ordine

7.1 Formalizzazioni al prim'ordine

Esercizio 7.1. Si consideri il linguaggio degli ordini parziali. Si definiscano delle formule che esprimano:

(a) x è il massimo;

(b) x è massimale;

(c) x è strettamente minore di y;

(d) z è l'inf di x e y;

(e) non c'è elemento strettamente compreso tra x e y.

Esercizio 7.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono almeno n elementi.

Esercizio 7.3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono al massimo n elementi.

Esercizio 7.4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esibire un enunciato al primo ordine che esprima il fatto che in una struttura ci sono esattamente n elementi.

Esercizio 7.5. Fornire un'assiomatizzazione al prim'ordine (con infiniti assiomi) per ciascuna delle seguenti classi:

(a) gruppi privi di torsione;

(b) grafi aciclici (per grafi intendiamo i grafi direttati, cioè ogni arco ha una direzione; inoltre ammettiamo al più un arco tra due nodi).

Esercizio 7.6. (a) Mostrare che, data una struttura finita A per un linguaggio finito, "essere isomorfo ad A" è definibile con un enunciato al prim'ordine.

(b) Mostrare che esiste una struttura infinita A per un linguaggio (finito o infinito) tale che "essere isomorfo ad A" non è definibile da alcun insieme di enunciati al prim'ordine. *Suggerimento: si utilizzi il teorema di Löwenheim-Skolem all'insù.*

Esercizio 7.7. Stabilire in quali dei seguenti casi il termine $f(a, u)$ (a simbolo di costante, u variabile, f simbolo di funzione ternario) è sostituibile per x in ϕ, e scrivere $\phi[f(a, u)/x]$. (P, R, S sono simboli di predicati):

(a) $f(x, x) = a$;

(b) $\exists x(f(x, x) = x)$;

(c) $P(x) \wedge \exists x R(x, y)$;

(d) $\exists u S(x, y, u)$;

(e) $\exists x \exists u(f(x, u) = f(u, x))$;

(f) $S(x, y, u)$.

Esercizio 7.8. Per ciascuna delle seguenti formule, stabilire se è in forma normale prenessa, quali sono le variabili libere, e se è un enunciato:

(a) $\exists x(A(x,y) \wedge B(x))$;

(b) $\exists x(\exists y(A(x,y) \to B(x)))$;

(c) $(\neg\exists x(\exists y A(x,y))) \to B(x)$;

(d) $(\exists x A(x,y)) \wedge B(x)$;

(e) $\forall x(\neg\exists y A(x,y))$;

(f) $\exists x A(x,x) \wedge \exists y B(y)$.

Esercizio 7.9. Si trovi un insieme coerente di enunciati in un certo linguaggio del primo ordine che non faccia uso del simbolo di uguaglianza e tale che ogni modello abbia cardinalità almeno 2.

Esercizio 7.10. Esiste un'assiomatizzazione al primo ordine della classe dei gruppi numerabili?

Esercizio 7.11. Esibire un linguaggio al primo ordine e un insieme Γ di enunciati che abbia esattamente un modello infinito numerabile (a meno di isomorfismi).

7.2 Conseguenza logica

Esercizio 7.12. Si consideri un linguaggio con un solo simbolo R, di predicato e di arietà 2. Si trovi un insieme finito di enunciati in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito.

Esercizio 7.13. Sia Γ l'insieme di formule:

- $\forall x \exists y R(x,y)$;
- $\forall x \forall y(R(x,y) \to \neg R(y,x))$;
- $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$.

Trovare un modello di Γ. Esiste un modello finito?

Esercizio 7.14. Si consideri un linguaggio con un simbolo di costante 0 e un simbolo di funzione unario s.

(a) Si trovi un insieme finito Γ di enunciati al prim'ordine in tale linguaggio che abbia un modello infinito ma che non abbia alcun modello finito. Si trovino due modelli di Γ non isomorfi.

(b) Esiste un insieme (possibilmente infinito) di enunciati al prim'ordine che abbia come unico modello (a meno di isomorfismi) l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali con l'elemento 0 e la funzione successore s?

Esercizio 7.15. Si consideri un linguaggio L del prim'ordine con un simbolo di predicato unario P e un simbolo di predicato binario M. Sia A_0 la struttura per L con insieme soggiacente $A_0 = \{3, 5\}$ in cui:

- $P(x) =$ "x è pari";
- $M(x, y) =$ "x $\leq$ y".

Siano a e b variabili, e sia ν_0 un'interpretazione delle variabili in A_0 tale che $\nu_0(a) = 3$ e $\nu_0(b) = 5$. Per ciascuna delle seguenti formule ϕ, stabilire:

(i) se $A_0, \nu_0 \models \phi$;

(ii) se $A_0 \models \phi$;

(iii) se $\models \phi$;

(iv) se ϕ è soddisfacibile.

Le formule sono:

(a) $\forall x M(a, x)$;

(b) $\forall x M(b, x)$;

(c) $\neg P(a)$;

(d) $\exists x M(a, x)$;

(e) $\exists x \forall y M(x, y)$;

(f) $\forall x (M(a, x) \rightarrow M(x, b))$;

(g) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg P(x))$;

(h) $\forall x \forall y (M(x, y) \rightarrow \neg M(y, x))$;

(i) $\neg(M(a, b) \leftrightarrow M(b, a))$;

(j) $\forall x (M(b, x) \vee M(x, a))$;

(k) $\forall x \exists y M(x, y)$;

(l) $\exists y P(y)$;

(m) $\forall x \neg P(x)$;

(n) $\exists x M(b, x)$;

(o) $\forall x(P(x) \rightarrow M(a, x))$;

(p) $\forall x \exists y M(y, x)$.

Esercizio 7.16. Produrre controesempi che mostrino che le seguenti formule non sono logicamente valide:

(a) $(\forall x \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(y, y)$;

(b) $P(a) \vee \neg P(b)$;

(c) $(\exists x \exists y R(x, y)) \rightarrow \exists y R(y, y)$;

(d) $\exists x(R(a, x) \vee R(b, x))$;

(e) $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)))$;

(f) $(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow ((\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x)))$.

Esercizio 7.17. Si esibisca un insieme non soddisfacibile di enunciati soddisfacibili.

Esercizio 7.18. Sia L un linguaggio del prim'ordine, e siano ϕ e ψ formule in tale linguaggio. Dimostrare che la condizione:

(i) Per ogni struttura A, se $A \models \phi$ allora $A \models \psi$;

implica:

(ii) Se $\models \phi$ allora $\models \psi$;

ma in generale non vale il viceversa.

Esercizio 7.19. Per ciascuno dei seguenti enunciati, mostrare che è soddisfacibile ma non logicamente valido:

(a) $\forall x \exists y R(x, y) \wedge \neg \forall x P(x)$;

(b) $\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$;

(c) $P(c) \rightarrow \neg P(c)$;

(d) $\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists y \forall x R(x, y)$;

(e) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$;

(f) $((\exists x P(x)) \to P(c)) \wedge \neg P(c)$;

(g) $P(c) \to P(a)$.

Esercizio 7.20. Siano $\phi = \forall x(R(a,x) \wedge \exists y R(x,y))$ e $\psi = \forall x R(x,x)$. Mostrare che $\phi \not\models \psi$ e $\psi \not\models \phi$.

Esercizio 7.21. Per le seguenti domande, si consideri come linguaggio quello dei gruppi:

(a) $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Th}(\mathbb{Z})$? (Consideriamo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come gruppi additivi.)

(b) $\mathrm{SN} \in \mathrm{ModTh}(\{\text{gruppi ciclici}\})$? (SN è il gruppo di permutazioni su $\mathbb{N}$.)

(c) Esiste un gruppo G tale che $\mathrm{Th}(G) = \mathrm{Th}(\{\text{gruppi}\})$?

(d) $\mathbb{Z} \in \mathrm{Th}(\{\text{gruppi ciclici finiti}\})$?

Esercizio 7.22. Si consideri il linguaggio vuoto. Mostrare che $\mathrm{Th}(\{\text{strutture finite}\}) = \mathrm{Th}(\{\text{strutture}\})$. (Una struttura per il linguaggio vuoto è semplicemente un insieme.)

Esercizio 7.23. La teoria dei gruppi è un'estensione conservativa della teoria dei monoidi?

Esercizio 7.24. Fornire un esempio di teoria non Henkin.

7.3 Forme normali prenesse

Esercizio 7.25. Riscrivere le seguenti formule in forma normale prenessa:

(a) $(\neg \exists z Q(x,y,z)) \vee (\forall z \exists w P(w,x,y,z))$;

(b) $(\forall x P(x)) \to Q(y)$;

(c) $\exists x(P(x) \wedge \exists x Q(x))$;

(d) $P(x,y) \wedge \forall x Q(x)$;

(e) $\exists x\big(P(x) \wedge \forall y(Q(x) \wedge \exists x R(x,y))\big)$;

(f) $\exists z\big(S(y,z) \wedge \exists y(S(z,y) \wedge \forall z(S(x,z) \wedge S(z,y)))\big)$;

(g) $\big(\forall x(R(x) \to P(x,y))\big) \to \big((\exists y R(x)) \to (\exists z P(y,z))\big)$;

(h) $(\exists x R(x,y)) \to \big(P(x) \to \neg R(x,u)\big)$;

(i) $\big(\forall z(R(x,z) \wedge R(x,y))\big) \to \exists w\big(R(x,w) \wedge R(y,w) \wedge R(z,w)\big)$.

7.4 Deduzione naturale al prim'ordine

Esercizio 7.26. Utilizzando le regole della deduzione naturale, produrre derivazioni per i seguenti fatti (le lettere x, y, z sono variabili, le lettere a, b, c sono costanti):

(a) $\vdash \forall x \neg(F(x) \wedge \neg F(x))$;

(b) $R(a), \forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$;

(c) $\exists x R(x), \forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \exists x S(x)$;

(d) $\forall x R(x) \vdash \forall y R(y)$;

(e) $\exists x R(x) \vdash \exists y R(y)$;

(f) $\neg \exists x \neg R(x) \vdash \forall x R(x)$;

(g) $\neg \forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x)$;

(h) $\exists x \neg R(x) \vdash \neg \forall x R(x)$;

(i) $\exists x \exists y R(x, y) \vdash \exists y \exists x R(x, y)$;

(j) $\forall x(F(x) \to G(a)) \vdash (\exists x F(x)) \to G(a)$;

(k) $(\exists x F(x)) \to G(a) \vdash \forall x(F(x) \to G(a))$;

(l) $\exists x(P \to R(x)) \vdash P \to \exists x R(x)$;

(m) $\exists x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \exists x A(x, y)$;

(n) $\vdash \exists x \exists y(R(x, y) \to R(y, x))$;

(o) $\exists x(R(x) \to \forall y R(y))$ (In *Logic and Structure*, van Dalen, è scritto che è istruttivo pensare a $R(x)$ come "x beve.");

(p) $\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$;

(q) $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \vdash \forall x(F(x) \wedge G(x))$;

(r) $\forall x \exists y \forall z R(x, y, z) \vdash \forall x \forall z \exists y R(x, y, z)$;

(s) $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x(R(x, x) \wedge \forall y R(y, x))$;

(t) $\forall x \forall y R(x, y) \vdash \forall x \forall y(R(x, y) \wedge R(y, x))$;

(u) $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \vdash \exists z(P(z) \vee Q(z))$;

(v) $\forall x(\exists y P(y) \to Q(x)) \vdash \forall x \exists y(P(y) \to Q(x))$;

(w) $\forall x \neg \forall y(P(x,y) \to Q(x,y)) \vdash \forall x \exists y P(x,y)$;

(x) $\neg \forall x \neg \forall y R(y,x) \vdash \forall x \neg \forall y \neg R(x,y)$;

(y) $\forall x(F(x) \to G(x)), \forall x F(x) \vdash \exists x G(x)$;

(z) $\forall x(F(x) \to \neg G(x)), \exists x G(x) \vdash \exists x \neg F(x)$.

Esercizio 7.27. È vero che $R(x) \vdash \forall x R(x)$?

Esercizio 7.28. Una variante del paradosso di Russell può essere esposta così: Ogni barbiere rade esattamente quelli che non si radono da sé. Perciò non ci sono barbieri. Semplifichiamola a: *Nessuno rade esattamente chi non si rade da sé.* Si formalizzi quest'ultimo enunciato al prim'ordine e lo si dimostri con la derivazione naturale (utilizzare un simbolo di predicato binario R per esprimere "x rade y" come $R(x,y)$).

Si dimostri con la deduzione naturale che, nel detto: *Chi ha i denti non ha il pane, e chi ha il pane non ha i denti*, si sta dicendo due volte la stessa cosa, cioè che le seguenti affermazioni sono logicamente equivalenti:

(a) $\forall x(D(x) \to \neg P(x))$ (chi ha i denti non ha il pane);

(b) $\forall x(P(x) \to \neg D(x))$ (chi ha il pane non ha i denti).

7.5 Applicazioni della compattezza

Esercizio 7.29. È facile vedere che ogni insieme parzialmente ordinato su un insieme finito può essere esteso a un ordine totale. Si utilizzi il teorema di compattezza per mostrare che questo risultato è vero anche per insiemi infinti.

Esercizio 7.30. Mostrare che le seguenti classi non sono assiomatizzabili al prim'ordine:

(a) gruppi finiti;

(b) gruppi di torsione;

(c) grafi connessi.

Nota: per dimostrare la non assiomatizzabilità al prim'ordine di una certa proprietà P, si utilizza praticamente sempre il teorema di compattezza; si scrive "non P" come una congiunzione di infiniti assiomi $\{\phi_i\}_i$ al prim'ordine tali che ogni sottoinsieme finito di $\{\phi_i\}_i$ non contraddice P (ma la loro congiunzione sì).

Esercizio 7.31. Mostrare che la classe dei gruppi privi di torsione non è finitamente assiomatizzabile.

Esercizio 7.32. Mostrare che la classe dei grafi aciclici non è finitamente assiomatizzabile.

Esercizio 7.33. Siano K_1 e K_2 teorie in uno stesso linguaggio L. Si assuma che ogni struttura M per L sia un modello di K_1 se e solo se non è un modello di K_2. Si mostri che K_1 e K_2 sono finitamente assiomatizzabili.

7.6 Ultraprodotti

Esercizio 7.34. Esiste un'ultrapotenza infinita di un insieme di due elementi?

Esercizio 7.35. Sia A un insieme finito. Sia I un insieme e U un ultrafiltro su I. Mostrare che l'immersione canonica

$$A \to \prod_{i \in I} A/U$$

è biiettiva.

Esercizio 7.36. Mostrare che, data una struttura finita A, ogni ultrapotenza di A è isomorfa ad A.

Esercizio 7.37. Mostrare che la classe degli insiemi ben ordinati non è assiomatizzabile al prim'ordine. *(Un insieme ben ordinato è un insieme totalmente ordinato ogni sottoinsieme non vuoto del quale ha un minimo.)*

- *Bozza di soluzione:* Considera un'ultrapotenza

  $$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}/F,$$

  con F che estende i cofiniti, e considera la successione di elementi:

  $$a_j = [(0, \ldots, 0 \text{ (j volte)}, 1, 2, 3, 4, \ldots)].$$

Esercizio 7.38. Mostrare (usando gli ultraprodotti) che la classe dei gruppi finiti non è assiomatizzabile al prim'ordine. *(Bozza di soluzione: trovare un ultraprodotto infinito di gruppi finiti. Sia C_n un gruppo ciclico di ordine n, generato da g_n. Considera*

$$\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)/F,$$

con F ultrafiltro che estende i cofiniti. Considera gli elementi:

$$\begin{aligned}
t_1 &= [(g_1^1, g_2^1, g_3^1, g_4^1, \ldots)],\\
t_2 &= [(g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, \ldots)],\\
t_3 &= [(g_1^3, g_2^3, g_3^3, g_4^3, \ldots)],\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Esercizio 7.39. Mostrare (usando gli ultraprodotti) che la proprietà di essere un campo (commutativo) di caratteristica zero non è una proprietà esprimibile al prim'ordine.