PRIMO APPELLO DI MATEMATICA I (ING. MEC. E GEST.)

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice né la consultazione di appunti o testi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali e il formulario possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (7 punti)**.** Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione

$$x^4 - \frac{(1+i)^2}{(1-i)} = 0$$

Soluzione: Risolvere l'equazione equivale a trovare le radici quarte di $\frac{(1+i)^2}{(1-i)}$. A tale scopo, scriviamo il numero complesso in forma algebrica:

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^3}{2} = \frac{(1+3i-3-i)}{2} = \frac{(-2+2i)}{2} = -1+i$$

È facile vedere che tale numero può essere scritto in forma trigonometrica come:

$$\sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{4}\pi)).$$

Date: 15/01/18.

Dunque applicando la formula di De Moivre si ottengono le seguenti soluzioni:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[8]{2}(\cos(\frac{3}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3}{16}\pi))\\
x_2 &= \sqrt[8]{2}(\cos(\frac{11}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{11}{16}\pi))\\
x_3 &= \sqrt[8]{2}(\cos(\frac{19}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{19}{16}\pi)) = \sqrt[8]{2}(\cos(-\frac{13}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{13}{16}\pi))\\
x_4 &= \sqrt[8]{2}(\cos(\frac{27}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(\frac{27}{16}\pi)) = \sqrt[8]{2}(-\cos(\frac{5}{16}\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{5}{16}\pi))
\end{aligned}
$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{((2-\cos(x))^3-1)(1+\cos(x))}{x^2}.$$

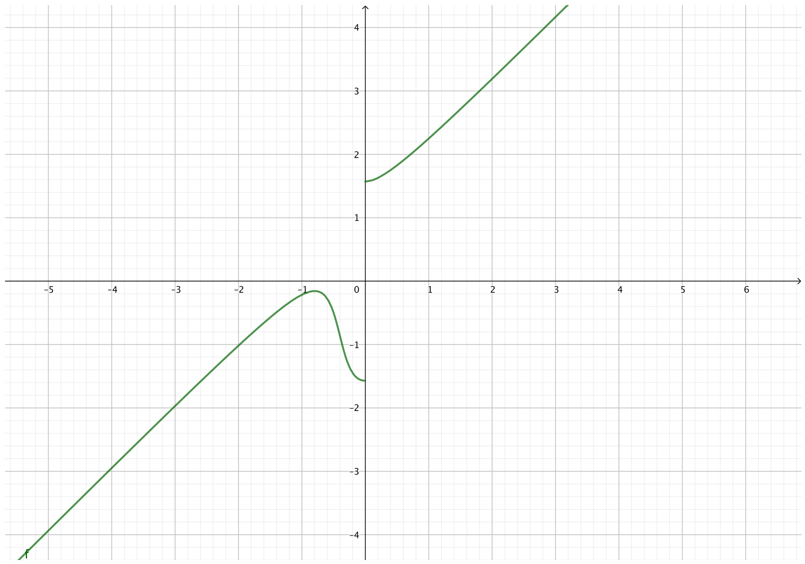
Soluzione:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{((2-\cos(x))^3-1)(1+\cos(x))}{x^2} &=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(2-\cos(x))^3-1}{1-\cos(x)}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+1-\cos(x))^3-1}{1-\cos(x)}\frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2} = 3\cdot 1 = 3
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 (8 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x + \mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

Suggerimento: attenzione, lo studio del segno non è semplice da portare avanti in maniera puramente algebrica. Conviene studiarlo approssimativamente studiando il segno delle funzioni x, $\mathrm{arctg}(x)$ e $\frac{2x+1}{x}$ separatamente.



Soluzione:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Per lo studio del segno si noti che $x \geq 0$ sse $\mathrm{arctg}(x) \geq 0$ e che $\frac{2x+1}{x} \geq 0$ sse $x \leq -1/2$ o $x > 0$. Quindi se $x \geq 0$ allora $f(x) \geq 0$ e se $x \leq -1/2$ allora $f(x) \leq 0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\pi/2$.
- $f'(x) = \frac{5x^2+4x}{5x^2+4x+1}$.

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx$$

Soluzione: Applichiamo la sostituzione $2x+1 = t$ e poi procediamo per parti. Si ha che $dx = \frac{1}{2}dt$ e gli estremi di integrazione diventano 1 e 5.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx &= \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\log(t)}{t^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\log(t)}{t} + \int \frac{1}{t^2} dx\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\log(t)}{t} + \frac{1}{t}\right]_1^5 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\log(5) + \frac{1}{5} - 0 - 1\right) \\
&= \frac{4 - \log(5)}{10}
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie al variare del parametro $a \in \mathbb{R}^+$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a^{\sqrt{k}}.$$

Soluzione: La serie è a termini positivi per ogni $a \in \mathbb{R}^+$. Se $a > 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} a^{\sqrt{n}} = +\infty$, quindi la serie diverge a $+\infty$. Se $a = 1$ la serie equivale a $\sum_1^{+\infty} 1$ che diverge ugualmente. Infine se $0 < a < 1$ applichiamo il criterio degli infinitesimi con $p = 2$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot a^{\sqrt{n}} = 0,$$

quindi la serie converge.