PRIMO APPELLO INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE (I SEMESTRE 2016/17)

23/01/2017

TRACCIA A

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari, ma non testi contenenti esserci svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Scrivere il seguente numero complesso in forma algebrica

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$$

Soluzione: Conviene risolverlo direttamente per via algebrica.

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} = \frac{(1+2i-1)}{(1-2i-1)(1-i)} = \frac{2i}{-2i(1-i)} = -\frac{1+i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** Risolvere il seguente limite

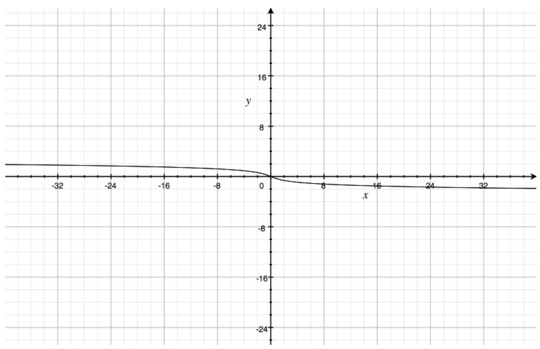
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{(1-\cos(x))^2}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{(1-\cos(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{x^4} \frac{x^4}{(1-\cos(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{x^4} \left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2 = 1^4 \cdot 2^2 = 4$$

Esercizio 3 (9 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (inclusa la derivata seconda):

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$$



Soluzione:

- $\mathtt{dom}(f) = \mathbb{R}$. L'argomento della radice è somma di quadrati. Inoltre $\sqrt{x^2+1}$ è sempre maggiore di x.
- $f(x) \geq 0$ sse $\sqrt{x^2+1} - x \geq 1$. Risolvendo il sistema si ha che $f(x) \geq 0$ sse $x \geq 0$. In particolare f passa per l'origine.
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - 1\right) = \frac{x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1})} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Quindi $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- $f''(x) = \frac{(x^2+1)^{-3/2}}{2} \cdot 2x = x(x^2+1)^{-3/2}$. Quindi $f''(x) \geq$ sse $x \geq 0$.

Esercizio 4 (7 punti)**.** Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx$$

Soluzione: Sfruttiamo la linearità

$$\int \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx = \int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} dx + \int 2xe^{-x} dx$$

Il primo si risolve in maniera immediata:

$$\int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{4}\frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}}.$$

Per il secondo integriamo per parti:

$$\int 2xe^{-x} dx = 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} = -2(e^{-x}(x+1)\right)$$

Quindi, tornando all'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right) dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \left(-\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} - 2e^{-t}(t+1)\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + 2 - \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+t^4)^2}} - 2e^{-t}(t+1)\right) = \frac{67}{32}$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_1^{+\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Soluzione: La serie è a termini positivi, quindi possiamo usare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e} \approx 1,47 > 1,$$

quindi la serie diverge.