**SECONDO APPELLO DI MATEMATICA I (ING. MEC. E GEST.)**

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice né la consultazione di appunti o testi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali e il formulario possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

*Date*: 12/02/18.

**Esercizio 1** (5 punti)**.** Calcolare i valori in $\mathbb{C}$ della seguente radice:

$$\sqrt[4]{1-i^5}$$

*Soluzione:* $\sqrt[8]{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{16}+\frac{k}{2}\pi)+i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{16}+\frac{k}{2}\pi)\big)$ per $k=0,1,2,3$.

**Esercizio 2** (6 punti)**.** Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(x)}{x^2}$$

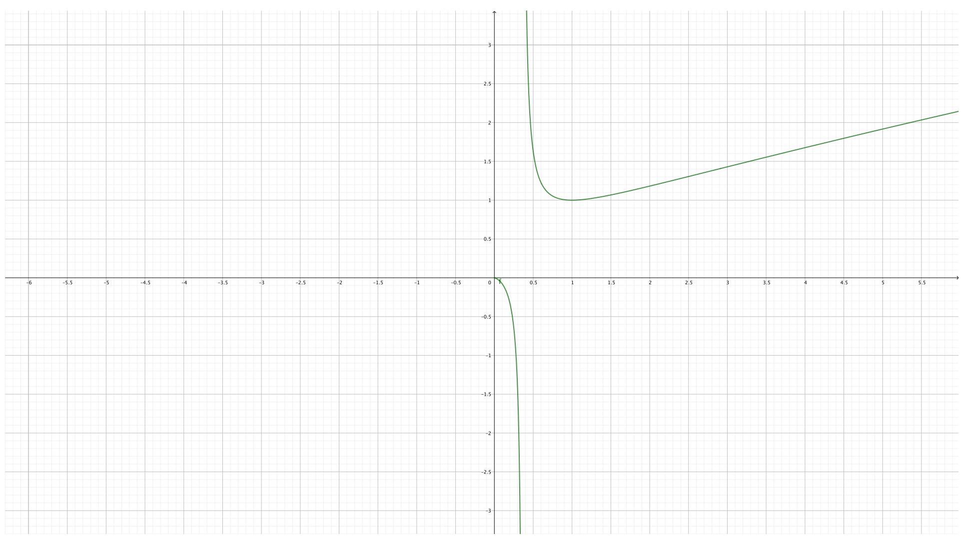
*Soluzione:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(x)}{x^2}\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\log[1+(\cos(x)-1)]}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-1/2$$

**Esercizio 3** (10 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x)=\frac{x}{1+\log(x)}.$$

*Soluzione:*



- $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}^+\setminus\{e^{-1}\}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(e^{-1})^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(e^{-1})^-}f(x)=-\infty$.
- $f'(x)=\frac{\log(x)}{(1+\log(x))^2}$.

**Esercizio 4** (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int x^5 e^{x^2} dx$$

*Soluzione:* Procediamo con la sostituzione $x^2 = t$, da cui otteniamo $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$.

$$\begin{aligned}\int x^5 e^{x^2} dx &= \int t^2 \cdot \sqrt{t} e^t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int t^2 e^t dt = \\ &= \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - \int 2te^t dt\right) = \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - 2te^t + \int 2e^t dt\right) = \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t\right) + c \\ &= e^t\left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right) + c = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\right) + c\end{aligned}$$

Dove, nella seconda riga, abbiamo integrato per parti.

**Esercizio 5** (5 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \log n}$$

*Soluzione:* La serie è a termini non negativi, quindi possiamo usare il criterio degli infinitesimi con $p = 2$:

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \frac{1}{n^2 + \log n} = 1$$

Poiché $p > 1$ e il limite è finito, la serie converge.