TERZO APPELLO DI MATEMATICA I (ING. MEC. E GEST.)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice né la consultazione di appunti o testi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali e il formulario possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 20/06/18.

Esercizio 1 (4 punti)**.** Sapendo che per la seguente serie a termini positivi si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{8}{3}$$

dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta:

(1) Non si può affermare nulla sul comportamento della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
(2) Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{8}{3}.$$

(3) C'è un a_k maggiore di $\frac{8}{3}$.
(4) La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

converge se la successione a_n è decrescente.

Soluzione:

(1) Falsa, perché la serie è termini positivi, quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
(2) Falsa, perché se la serie converge necessariamente $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
(3) Falsa, perché la serie è termini positivi, se ci fosse un $a_k > \frac{8}{3}$ allora avremmo

$$\frac{8}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_k + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}, + a_{k+1}, \cdots < \frac{8}{3} + R)$$

con $R > 0$ poiché la serie è a termini positivi, e ciò è assurdo.
(4) Vera, per il criterio di Leibniz. Infatti per ipotesi la serie è convergente e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Esercizio 2 (6 punti)**.** Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2}$$

Soluzione:

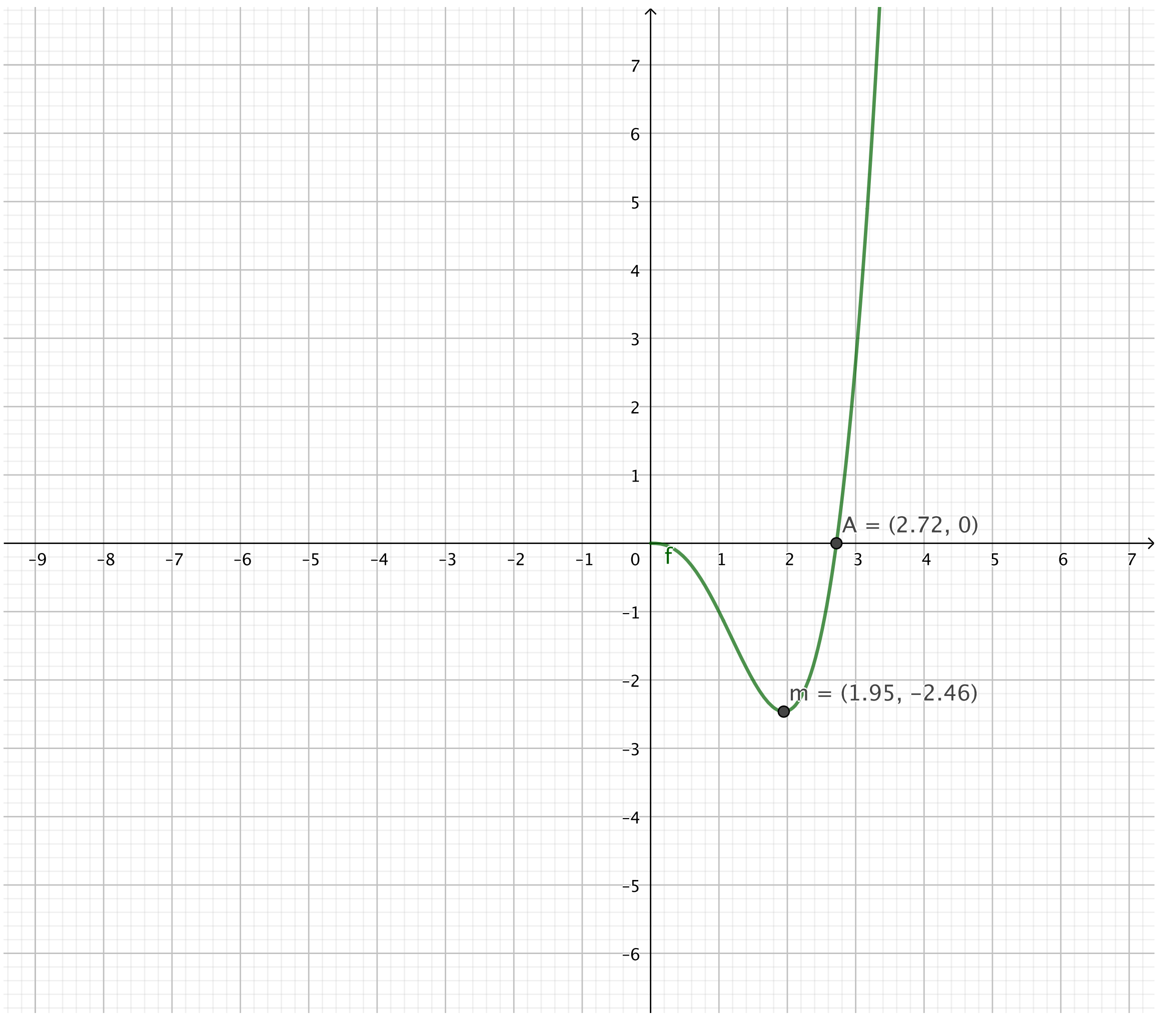
$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - e^{(1-x)^2}}{3(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{3}\frac{e^{(x-1)^2} - 1}{(x-1)^2} = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{3}\frac{e^y - 1}{y} = -\frac{1}{3}.$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^3(\log(x) - 1).$$

Soluzione:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+$.
- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = 3x^2\log(x) - 2x^2$, $f''(x) = 6x\log(x) - x$


A = (2.72, 0)
m = (1.95, −2.46)
f

Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{x+1}{x(1+x^2)}dx$$

Soluzione:

$$\frac{x+1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

Da cui si ricava $A = C = 1$ e $B = -1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(1+x^2)}dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{1-x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \log|x| + \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \log|x| + \arctan(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c\end{aligned}$$

Esercizio 5 (5 punti)**.** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx$$

Soluzione: Facciamo un cambio di variabile: $t = \sqrt{x}$, dunque $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \int \frac{1}{t(4+9t^2)}2tdt = \int \frac{2}{4+9t^2}dt = \frac{2}{6}\arctan\frac{3t}{2} + c.$$

Quindi, poiché se $x \to +\infty$ anche $t \to +\infty$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan\frac{3t}{2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\arctan\frac{3b}{2} = \frac{\pi}{6}.$$