TERZO APPELLO INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE
(I SEMESTRE 2016/17)
12/06/2017

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari, ma non testi contenenti esserci svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Calcolare in $\mathbb{C}$ le radici terze di 8.

Soluzione: In forma trigonometrica 8 è uguale a $8(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$. Quindi le tre radici sono:

(1) $2(\cos(0/3) + i \operatorname{sen}(0/3)) = 2$,
(2) $2(\cos(2/3\pi) + i \operatorname{sen}(2/3\pi)) = -1 + i\sqrt{3}$,
(3) $2(\cos(4/3\pi) + i \operatorname{sen}(4/3\pi)) = -1 - i\sqrt{3}$,

Esercizio 2 (7 punti)**.** Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log\big(\operatorname{sen}(x)\big)}{\cos(x)}$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\log\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\log\big(1-\cos^2(x)\big)}{\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x)\frac{1}{2}\log\big(1-\cos^2(x)\big)}{\cos^2(x)}.$$

A questo punto usiamo il limite notevole

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} \qquad \text{con } f(x) = \cos^2(x).$$

Quindi otteniamo

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{2}\cos(x) = 0$$

Esercizio 3 (9 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (non è necessario studiare la convessità):

$$f(x) = \log(\cos(\sqrt{x-x^2}))$$

Soluzione:

- La funzione è definita quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a 0 e quello del logaritmo è maggiore di 0, quindi $\texttt{dom}(f) = [0,1]$.
- Per studiare la funzione conviene preliminarmente studiare $g(x) = \sqrt{x-x^2}$. La funzione g è definita positiva, ha dominio $[0,1]$. Calcolando la derivata di g si trova facilmente che ha un punto di massimo in $(1/2, 1/2)$.
- Per studiare la positività è necessario sapere quando l'argomento del logaritmo è maggiore di 1. Ma abbiamo appena provato che $0 \le g(x) \le 1/2 < 1$, quindi la funzione è sempre minore o uguale a 0. La funzione si annulla per $x = 0$ e $x = 1$.
- Non ci sono limiti da calcolare.
- La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(\sqrt{x-x^2})}{\cos(\sqrt{x-x^2})}\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{(2x-1)\operatorname{tg}(\sqrt{x-x^2})}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi per sapere come varia il segno di $f'(x)$ è necessario sapere come varia quello di $\text{tg}(\sqrt{x-x^2})$, ma poiché $0 \leq g(x) \leq 1/2$, la tangente è sempre positiva, quindi f ha un minimo in $x = 1/2$, dove vale circa 0,05.

Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Soluzione: Procediamo con la sostituzione $x = t^6$, da cui otteniamo $dx = 6t^5 dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3-1}{t+1} + \frac{1}{t+1}dt = \\ &= 6\int \frac{(t^2-t+1)(t+1)}{t+1} + \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int t^2 - t + 1 + \frac{t^3}{t+1}dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log(t+1) + c.\end{aligned}$$

Applicando la sostituzione inversa il risultato finale è

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \log(\sqrt[6]{x} + 1) + c$$

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$$

Soluzione: La serie è a termini positivi, quindi possiamo usare il criterio del rapporto.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!2^{(n+1)} \cdot n^n}{n!2^n \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\frac{2^{(n+1)}}{2^n}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 2/e < 1\end{aligned}$$

Da ciò segue che la serie converge.