QUARTO APPELLO DI MATEMATICA I (ING. MEC. E GEST.)

Nome:	______________________________
Cognome:	______________________________
Matricola:	______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentito l'uso della calcolatrice né la consultazione di appunti o testi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali e il formulario possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 10/07/18.

Esercizio 1 (5 punti)**.** Dimostrare per induzione che

$$n! > 2^n$$

per ogni $n \geq 4$.

Soluzione: Passo base $n = 4$, bisogna verificare che $4! > 2^4$. Ciò è vero perché il primo membro è uguale a 24, mentre il secondo è uguale a 16.

Passo induttivo. Supponendo che sia vero $n! > 2^n$ bisogna dimostrare che $(n+1)! > 2^{(n+1)}$. Cominciamo a moltiplicare ambo i membri della disequazione che sappiamo essere vera per $(n+1)$, ottenendo $(n+1)(n!) > (n+1)2^n$. Se $n \geq 4$ allora sicuramente $(n+1) \geq 2$, quindi otteniamo: $(n+1)(n!) > (n+1)2^n \geq 2 \cdot 2^n$. Dunque $(n+1)! = (n+1)(n!) > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ e la tesi è dimostrata.

Esercizio 2 (5 punti)**.** Risolvere il seguente limite, senza usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log((x^2+1)^2) + \log^2(x^2+1)}{\log(x^2+1)}$$

Soluzione:

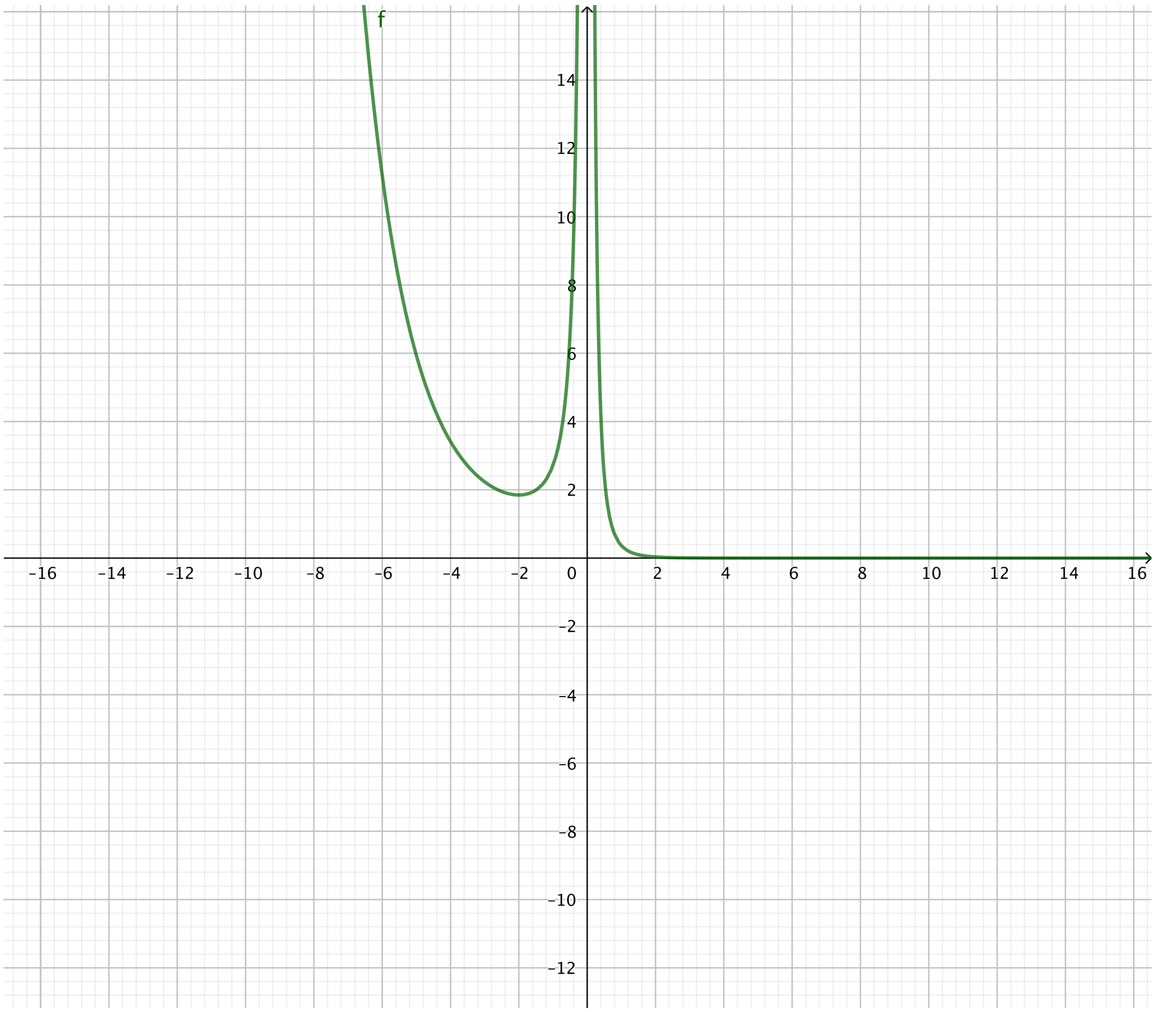
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\log((x^2+1)^2) + \log^2(x^2+1)}{\log(x^2+1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\log(x^2+1) + \log^2(x^2+1) + 1 - 1}{\log(x^2+1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\log(x^2+1))^2 - 1}{\log(x^2+1)} = 2.\end{aligned}$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

Soluzione:

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $f(x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = -\frac{2xe^x + x^2e^x}{x^4e^{2x}} = \frac{-x-2}{x^3e^x}$, $f''(x) = \frac{x^2+4x+6}{x^4e^x}$


f
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−16
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
16

Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}dx$$

Soluzione: Una sostituzione che permette di eliminare contemporaneamente i due radicali è $2x = t^6$, da essa infatti si ha $\sqrt{2x} = t^3$ e $\sqrt[3]{2x} = t^2$. Inoltre si ha $dx = 3t^5 dt$, dunque:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}dx &= \int \frac{3t^5}{t^3(t^2+1)}dt = \int \frac{3t^2}{t^2+1}dt = 3\int \frac{t^2}{t^2+1}dt \\ &= 3\int 1 - \frac{1}{t^2+1}dt = 3t - 3\,\mathrm{arctg}(t) + c = \\ &= 3\sqrt[6]{2x} - 3\,\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{2x}) + c\end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^4)}{n^2+1}$$

Soluzione: La serie data non è a termini di segno costante perché $\cos(n^4)$ cambia di segno al variare di n. Consideriamo allora la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n^4)}{n^2+1}\right| \tag{1}$$

Osserviamo che vale la seguente maggiorazione:

$$\left|\frac{\cos(n^4)}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2}$$

(perché: $|\cos(n^4) \leq 1$ e $n^2+1 > n^2$.) Dal teorema del confronto per le serie, otteniamo che (**??**) converge, dunque per il criterio della convergenza assoluta la serie di partenza è assolutamente convergente e quindi anche convergente.