QUARTO APPELLO INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE
(I SEMESTRE 2016/17)
3/07/2017

Nome: ____________________

Cognome: ____________________

Matricola: ____________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari, ma non testi contenenti esserci svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Dimostrare per induzione la formula

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$$

Soluzione: La formula è vera per $n = 1$. Infatti sostituendo si ha 2=2. Supponiamo che la formula sia vera per n e dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k = \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2).$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} (n^n - 2^n)$$

Suggerimento: confrontare la successione con un'altra più semplice.

Soluzione:

$$n^n - 2^n = n^n \left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^n\right) \geq n^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \qquad \forall n \geq 3$$

Dove abbiamo usato il fatto che $0 \leq 2/n \leq 2/3 \leq 1$ per ogni $n \geq 3$ e che le funzioni potenza sono crescenti tra 0 e 1.

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} n^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$$

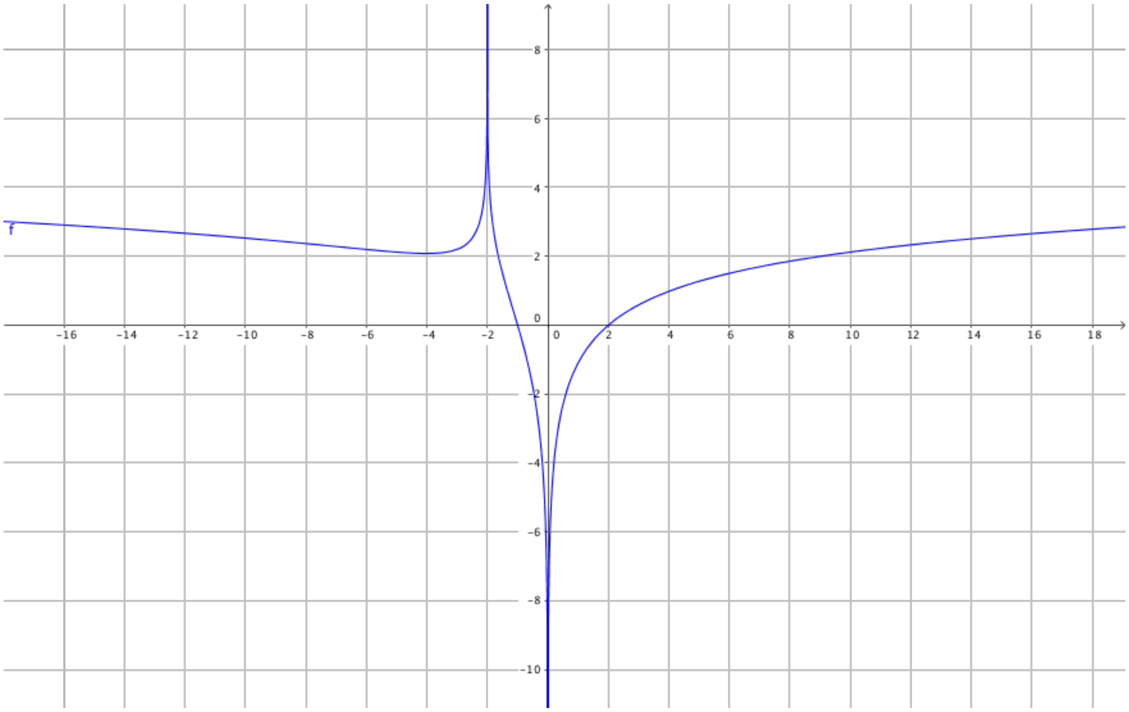
Per il teorema del confronto anche $n^n - 2^n$ tende a $+\infty$ per n che tende a infinito.

Esercizio 3 (9 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (non è necessario studiare la convessità):

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right)$$

Soluzione:

- La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è maggiore di 0 e il denominatore è diverso da 0, quindi $\mathtt{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.



Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int x^5 e^{x^2} dx$$

Soluzione: Procediamo con la sostituzione $x^2 = t$, da cui otteniamo $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$.

$$\begin{aligned}\int x^5 e^{x^2} dx &= \int t^2 \cdot \sqrt{t} e^t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int t^2 e^t dt = \\ &= \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - \int 2te^t dt\right) = \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - 2te^t + \int 2e^t dt\right) = \frac{1}{2}\left(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t\right) + c \\ &= e^t \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right) + c = e^{x^2}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1\right) + c\end{aligned}$$

Dove, nella seconda riga, abbiamo integrato per parti.

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen}^2(n)}{n^3 + 1}$$

Soluzione: Sfruttiamo la seguente disuguaglianza:.

$$\frac{n \operatorname{sen}^2(n)}{n^3 + 1} \leq \frac{n}{n^3 + 1}$$

La seconda serie converge per il criterio degli infinitesimi (è a termini positivi e $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{n}{n^3+1} = 1$). Poiché la prima è a termini positivi, anch'essa converge.