QUINTO APPELLO DI MATEMATICA I (ING. MEC. E GEST.)

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- Non è consentita la consultazione di appunti o testi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 8)**. I 3 fogli finali e il formulario possono essere usati liberamente e vanno staccati solo al momento della consegna.
- **Buon lavoro!**

Date: 3/09/18.

Esercizio 1 (5 punti)**.** Dimostrare che $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione: Passo base: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$

Esercizio 2 (5 punti)**.** Risolvere il seguente limite, senza usare de l'Hôpital:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log n}{(n+1)(n+2)}$$

Soluzione:

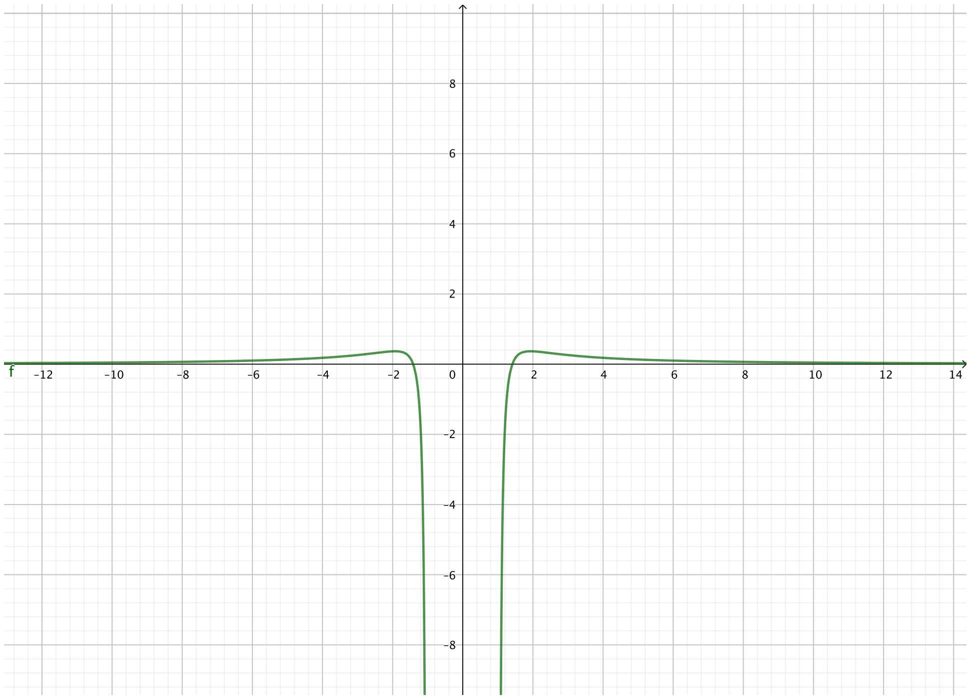
$$\frac{n\log n}{(n+1)(n+2)} = \frac{\log n}{n} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Esercizio 3 (10 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (non è necessario lo studio della concavità):

$$f(x) = \frac{\log(x^2-1)}{x^2-1}.$$

Soluzione:

- $\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- $f(x) > 0 \qquad \forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.
- $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- $f'(x) = \frac{-2x\log(x^2-1)+2x}{(x^2-1)^2}$.


8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
f

Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale
$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx$$
Soluzione: Operiamo la sostituzione $t=\sqrt{x-1}$, che dà $x=t^2+1$ e $dx=2tdt$.
$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx = \int \frac{t^2+1+t}{t^2-4}2tdt = 2\int \frac{t^3+t^2+t}{t^2-4}dt.$$
Facendo la divisione tra polinomi si ottiene che $t^3+t^2+t=(t^2-4)(t+1)+5t+4$. Quindi
$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx = 2\int t+1dt + 2\int \frac{5t+4}{t^2-4}dt.$$
Per risolvere il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici, imponendo:
$$\frac{5t+4}{t^2-4} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t+2A+2B}{t^2-4}.$$
Dunque devono essere $A=7/2$ e $B=3/2$. Infine si ha:
$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx &= 2\int t+1dt + 7\int \frac{1}{t-2}dt + 3\int \frac{1}{t-2}dt = \\ &= t^2+2t+t\log|t-2|+3\log|t+2|+c = \\ &= x-1+2\sqrt{x-1}+7\log|\sqrt{x-1}-2|+3\log|\sqrt{x-1}+2|+k.\end{aligned}$$

Esercizio 5 (6 punti)**.** Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$$
dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(1) La serie non converge perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n!} \neq 0$.
(2) Converge per il criterio del rapporto.
(3) Poiché $5^n > n!$, si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{5^n}{n!} > 1$ e dunque la serie diverge.
(4) È una serie a termini positivi.
(5) La serie converge assolutamente.

Soluzione:

(1) Falsa perché $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$.
(2) Vera, basta verificare.
(3) Falsa perché $5^n < n!$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$.
(4) Vera: $5^n > 0$ e $n! > 0$.
(5) Vera, poiché è una serie a termini positivi, aggiungendo i valori assoluti rimane uguale.