QUINTO APPELLO INGEGNERIA MECCANICA E GESTIONALE
(I SEMESTRE 2016/17)
04/09/2017

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________

Matricola: ______________________________

- Tempo a disposizione: **2 ore e mezza**.
- Voto massimo: **30/30**.
- È possibile consultare i testi di teoria utilizzati durante il corso o formulari, ma non testi contenenti esserci svolti o istruzioni su come svolgere gli esercizi.
- Non è permessa nessuna forma di comunicazione con l'esterno o con gli altri partecipanti all'esame.
- I fogli che verranno presi in considerazione durante la correzione sono **solo quelli con le tracce degli esercizi (pagine da 1 a 6)**. I 4 fogli finali possono essere usati liberamente e vanno staccati **solo al momento della consegna**.
- **Buon lavoro!**

Esercizio 1 (5 punti)**.** Trovare le radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $z = -1 - i$.

Soluzione: Le radici quadrate di $z = -1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{4}))$ sono

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\pi}{8})\right) \text{ e } z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos(\frac{13\pi}{8}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{13\pi}{8})\right)$$

Esercizio 2 (7 punti)**.** Calcolare il seguente limite (il logaritmo è inbase e).

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x) + 2\log(3x) + \log(\frac{1}{2x}))}{\sqrt{x(x^2+3x-2)}}$$

Soluzione:

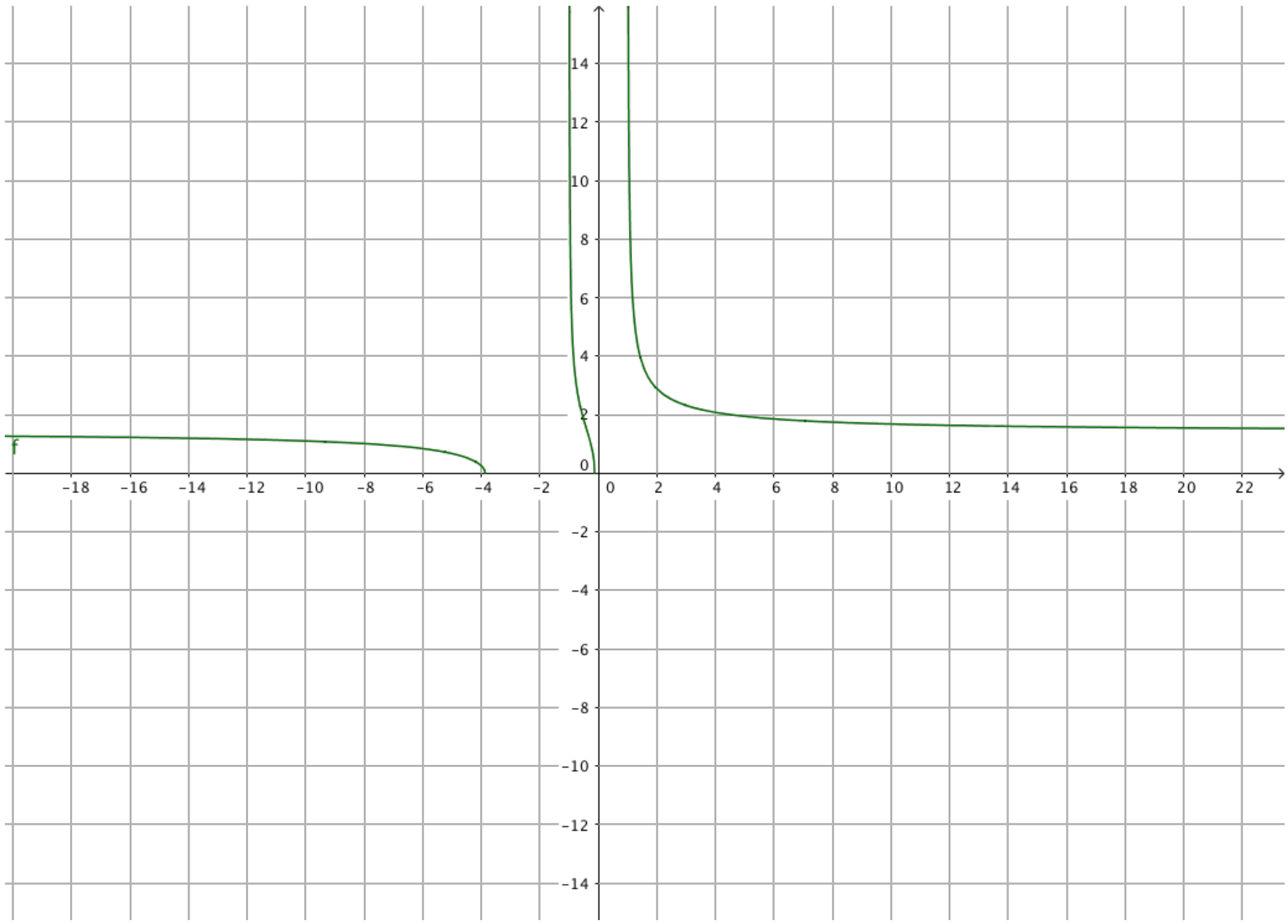
$$\lim_{x\to 0} \frac{3\log(x) + 2\log(3x) + \log(\frac{1}{2x}))}{\sqrt{x(x^2+3x-2)}} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3) + \log(9x^2) + \log(\frac{1}{2x}))}{\sqrt{(x^3+3x^2-2x)}} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{9x^5}{2x})}{\sqrt{(x^3+3x^2-2x)}} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{9x^4}{2})}{\sqrt{(x^3+3x^2-2x)}} = -\infty$$

Esercizio 3 (9 punti)**.** Studiare il grafico della seguente funzione (non è necessario studiare la convessità):

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+8x+1}{x^2-1}}$$

Soluzione:

- La funzione è definita quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a 0 e il denominatore è diverso da 0, quindi $\mathtt{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-4-\sqrt{14}}{2} \vee -1 < x \leq \frac{4-\sqrt{14}}{2} \vee x > 1\}$.



Esercizio 4 (7 punti)**.** Risolvere il seguente integrale

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$$

Soluzione: Procediamo con la sostituzione $e^x = t$, da cui otteniamo $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned} &\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \\ &= \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= arctg(t) + c = arctg(e^x) + k \end{aligned}$$

Dove, nella seconda riga, abbiamo integrato per parti.

Esercizio 5 (7 punti)**.** Studiare il carattere della seguente serie (il logaritmo è in base e).

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n \log(n)}$$

Soluzione: Sfruttiamo la seguente disuguaglianza:.

$$\forall n > 2 \ \log(n) \geq 1 \ \Rightarrow \frac{1}{\log(n)} \leq 1.$$

Da cui abbiamo

$$\frac{1}{2^n \log(n)} \leq \frac{1}{2^n}$$

La seconda serie è una geometrica di ragione 1/2, quindi converge. Poiché la prima è a termini positivi, anch'essa converge.