Appunti del corso di

Algebra Universale e Teoria delle Categorie

Tenuto dal Prof. *Luca Spada*

Università degli Studi di Salerno

Parzialmente trascritti in LaTeX da: *Maria Bevilacqua*

2 maggio 2023
Versione 0.5

INDICE

1

I CONCETTI DI BASE

1.1 DEFINIZIONE DI ALGEBRA ED ESEMPI

Se A un insieme e n un numero naturale, allora A^n indica il prodotto cartesiano $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ volte}}$. Poniamo $A^0 = \{\varnothing\}$.

Più in generale, se A e B sono insiemi A^B indica l'insieme delle funzioni da B in A. Si noti che le due notazioni sono compatibili se pensiamo a n come all'insieme $\{0, 1, \dots, n-1\}$. In particolare si ha $A^0 = A^\varnothing = \{\varnothing\}$, infatti l'unica funzione $f\colon \varnothing \to A$ è la **funzione vuota**. Si osservi inoltre che $\varnothing^\varnothing = \{\varnothing\}$.

Per ogni insieme A e per ogni numero naturale n chiamiamo le funzioni $f\colon A^n \to A$ **operazioni n-arie**. Si noti che le funzioni 0-arie $f\colon A^0 \to A$ ($f\colon \{\varnothing\} \to A$) sono univocamente determinate dal valore $f(\varnothing) \in A$. Per questo motivo sono dette **costanti**.

Definizione 1.1

Un'**algebra** è una coppia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F}^A)$ tale che A è un insieme non vuoto e $\mathcal{F}^A = \{f_i^A \mid i \in I\}$ è una famiglia di operazioni su A. L'insieme A è detto **universo** (anche detto **dominio**, **sostegno** o **supporto**) dell'algebra e gli elementi di $\mathcal{F}$ sono detti **operazioni fondamentali** (o **di base**).

Data un'algebra $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F}^A)$ abbiamo una funzione $\rho\colon \mathcal{F}^A \to \mathbb{N}$ che assegna ad ogni $f \in \mathcal{F}^A$ la sua arietà. Questa funzione ρ è detta **tipo** di $\mathscr{A}$. Se due algebre hanno lo stesso tipo, vengono dette **simili**.

Esempio 1.2.

1. Un **semigruppo** è un'algebra $(S, \cdot)$ di tipo (2) che soddisfa la seguente equazione:
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
$(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{N}, +)$ sono semigruppi.

2. Un **monoide** è un'algebra $(S, \cdot, e)$ di tipo $(2, 0)$ che soddisfa le equazioni:
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

$(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{N}, +)$ sono monoidi, $(\mathbb{N}, \cdot)$ è un monoide. Se A è un insieme, A^A è un semigruppo rispetto alla composizione.

3. Un **gruppo** è un'algebra $(S, \cdot, ^{-1}, e)$ di tipo $(2, 1, 0)$ che soddisfa le equazioni:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$$

4. Un **anello** è un'algebra $\mathscr{S} = (S, \cdot, +, -, e)$ di tipo $(2, 2, 1, 0)$ tale che $(S, +, -, e)$ è un gruppo commutativo e $\mathscr{S}$ soddisfa

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

5. Consideriamo un anello R e un'algebra $\mathscr{M} = (M, +, -, 0, (\lambda_r \mid r \in R))$ di tipo $(2, 1, 0, 1, 1, \dots)$ tale che $(M, +, -, 0)$ sia un gruppo abeliano e

$$\lambda_r(x + y) = \lambda_r(x) + \lambda_r(y)$$

$$\lambda_{r+s}(x) = \lambda_r(x) + \lambda_s(x)$$
$$\lambda_r(\lambda_s(x)) = \lambda_{rs}(x)$$

Diremo che $\mathscr{M}$ è un **modulo** (**sinistro**). Si osservi che il linguaggio di queste algebre dipende da R.

6. Un **quasigruppo** è un'algebra $(Q, \cdot, /, \backslash)$ tale che

$$x \backslash (x \cdot y) = y$$

$$x \cdot (x \backslash y) = y$$
$$(x \cdot y)/y = x$$
$$(x/y) \cdot y = x$$

Un gruppo può sempre essere pensato come un quasigruppo ponendo $x \backslash y = x^{-1}y$ e $x/y = xy^{-1}$. Nei quasi gruppi il $\cdot$ non è necessariamente associativo. Si possono caratterizzare i quasigruppi come algebre di tipo (2) tali che le equazioni $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ hanno un'unica soluzione. Per esempio l'algebra di tipo (2) in cui il domionio è $A = \{a, b, c\}$ e l'operazione è data dalla seguente tabella

$\cdot$	**a**	**b**	**c**
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

è un quasigruppo. Invece $S = \{u, v, w\}$ con l'operazione

	u	**v**	**w**
u	v	u	w
v	u	v	v
w	w	w	u

non lo è in quanto l'equazione $w \cdot x = w$ ha per soluzioni sia u che v.
Altri esempi di quasigruppi sono $(\mathbb{Z}, -)$ (si osservi che questo non è un gruppo perché $(a-b)-c \neq a-(b-c)$) e i punti del piano $\mathbb{R}^2$ con l'operazione che a una coppia di punti fa corrispondere il loro punto medio.

Spesso sarà più comodo pensare a $\mathcal{F}$ come una famiglia di **simboli di operazione** (detto **linguaggio** o **segnatura**) e indicare con $\mathcal{F}^A := \{f^A \mid f \in \mathcal{F}\}$ le operazioni corrispondenti in A (anche dette **interpretazioni** dei simboli di funzione).

Esempio 1.3. Consideriamo il tipo (2) e $\mathcal{F} = \{p(\,,)\}$. Allora $p(\,,)$ può essere interpretato ad esempio nei seguenti modi: $(\mathbb{N}, +) = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{N}})$ con $p^{\mathbb{N}} = +$ oppure $(\mathbb{N}, \cdot) = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{N}})$ con $p^{\mathbb{N}} = \cdot$

Esempio 1.4. I gruppi possono essere presentati come algebre in un linguaggio con tre simboli di operazione p, i, e con $\rho(p) = 2$, $\rho(i) = 1$ e $\rho(e) = 0$. In questo modo un gruppo sarà (G, p^G, i^G, e^G).

1.2 IMMAGINI OMOMORFE, PRODOTTI DIRETTI E SOTTOALGEBRE

Definizione 1.5

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F}^A)$ un'algebra. Un sottoinsieme $B \subseteq A$ è detto **sottouniverso** se per ogni operazione n-aria in $\mathcal{F}$ e per ogni $b_1, \cdots, b_n \in B$ vale $f^A(b_1, \cdots, b_n) \in B$.

Definizione 1.6

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F}^A)$ un'algebra e B un sottouniverso di $\mathscr{A}$. L'algebra $\mathscr{B} = (B, \mathcal{G})$

dove $\mathcal{G}$ è formato dalle restrizioni a B delle operazioni di $\mathscr{A}$ è detta **sottoalgebra** di $\mathscr{A}$ ovvero

$$f^{A}_{\restriction B} \quad \text{per ogni} \quad f \in F.$$

In questo caso scriveremo $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$.

Definizione 1.7

Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ algebre per lo stesso linguaggio $\mathcal{F}$. Una funzione $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ è detta **omomorfismo** se per ogni simbolo f di operazione n-aria in $\mathcal{F}$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$ si ha

$$h(f^{\mathscr{A}}(a_1, \cdots, a_n)) = f^{\mathscr{B}}(h(a_1), \cdots, h(a_n)).$$

Un omomorfismo $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ è detto:

1. **monomorfismo** se è iniettivo,
2. **epimorfismo** se è suriettivo (in questo caso diremo che $\mathscr{B}$ è un'**immagine omomorfa** di $\mathscr{A}$,
3. **isomorfismo** se è biettivo,
4. **endomorfismo** se $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ e quindi $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$,
5. **automorfismo** se è un'endomorfismo biettivo.

Osservazione 1.8. L'insieme $End(A)$ degli endomorfismi di A con l'operazione di composizione è un monoide, mentre $Aut(A)$, insieme degli automorfismi di A, costituisce un gruppo.

Definizione 1.9

Sia $S := \{S_i \mid i \in I\}$ una famiglia di insiemi. Allora è possibile definire il **prodotto cartesiano**

$$\prod S = \prod_{i \in I} S_i := \{f\colon I \to \cup S_i \mid \forall i \in I \; f(i) \in S_i\}$$

$f \in \prod S$ è detta **funzione di scelta**.
Se $S := \{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di algebre per lo stesso tipo $\mathcal{F}$, il **prodotto**

diretto è l'algebra che ha come dominio il prodotto cartesiano dei domini $B = \prod_{i \in I} A_i$ e per ogni simbolo di operazione n-aria g in $\mathcal{F}$,

$$g^B(f_1, \cdots, f_n)(i) := g^{A_i}(f_1(i), \cdots, f_n(i)) \quad \forall i \in I$$

Esercizio 1.10. Applicare la definizione 1.9 nel caso $| I |= 2$ con la notazione infissa.

Osservazione 1.11. Se tutte le A_i sono isomorfe si parlerà di **potenza diretta**.

Definizione 1.12

Se $\mathcal{K}$ è una classe di algebre scriveremo:

1. $\mathbb{H}(\mathcal{K})$ per la classe delle immagini omomorfe di algebre in $\mathcal{K}$
2. $\mathbb{S}(\mathcal{K})$ per la classe delle algebre isomorfe a sottoalgebre di algebre di $\mathcal{K}$
3. $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ per la classe delle algebre isomorfe a prodotti diretti di algebre in $\mathcal{K}$.

Per definizione $\mathbb{H}(\mathcal{K})$, $\mathbb{S}(\mathcal{K})$ e $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ sono chiuse per isomorfismi. Diremo che $\mathcal{K}$ è chiuso per immagini omomorfe se $\mathbb{H}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Diremo che $\mathcal{K}$ è chiuso per sottoalgebre se $\mathbb{S}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Diremo che $\mathcal{K}$ è chiuso per prodotti diretti se $\mathbb{P}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Definizione 1.13 (Varietà)

Una classe di algebre è detta **varietà** se è chiusa per immagini omomorfe, sottoalgebre e prodotti.

Esempio 1.14. In seguito sono presentati esempi di classi di algebre con le loro proprietà di chiusura:

classe $\mathcal{K}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{S}$	$\mathbb{P}$
semigruppi, gruppi, anelli	sì	sì	sì
gruppi finiti	sì	sì	no
gruppi divisibili	sì	no	sì
campi	sì	no	no
anelli senza nilpotenti	no	sì	sì
domini d'integrità	no	sì	no
$\{A \mid A \cong \prod_{i \in I}(\mathbb{N}, +) \quad I \text{ insieme}\}$	no	no	sì
$\{(\mathbb{N}, +)\}$	no	no	no

Definizione 1.15

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F}^A)$ un'algebra e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. L'algebra $\mathscr{B} = (A, \mathcal{G}^A)$ è detta **ridotto** di $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}$ è detta **espansione** di $\mathscr{B}$.

Ad esempio, ogni anello è espansione di un gruppo (abeliano) e ogni spazio vettoriale ha come ridotto un gruppo (abeliano).

Definizione 1.16

Un'algebra $\mathscr{A}$ è detta **banale** se il suo dominio è costituito da un solo elemento.

Proposizione 1.17. *Se $\mathscr{A}$ è un'algebra e $S = \{S_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottouniversi di $\mathscr{A}$, allora $\bigcap S$ è un sottouniverso di $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Sia $B := \bigcap S$. Banalmente $B \subseteq A$. Sia f un simbolo di operazione n-aria e siano $a_1, \dots, a_n \in B$. Allora $a_1, \dots, a_n \in S_i$ per ogni $S_i \in S$. Ma ogni S_i è un sottouniverso, quindi $f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S_i$ per ogni $S_i \in S$. Quindi $f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) \in B$. □

Definizione 1.18

Se $\mathscr{A}$ è un'algebra e $X \subseteq A$, si definisce il **sottouniverso di $\mathscr{A}$ generato da X** come

$$\mathtt{Sg}^{\mathscr{A}}(X) := \bigcap\{U \in \mathtt{Sub}(\mathscr{A}) \mid X \subseteq U\}$$

dove $\mathtt{Sub}(\mathscr{A})$ è l'insieme dei sottouniversi di $\mathscr{A}$.

Alla luce della Proposizione 1.17, $\mathtt{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ è un sottouniverso di $\mathscr{A}$, per ogni $X \subseteq A$.

Teorema 1.19

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F})$ un'algebra e $X \subseteq A$. Definiamo per ricorsione su n gli insiemi X_n come segue:

$$\begin{aligned} X_0 &:= X \\ X_{n+1} &:= X_n \cup \{f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_k) \mid f \in \mathcal{F},\ \rho(f) = k,\ a_1, \dots, a_k \in X_n\} \end{aligned}$$

Allora $\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Dimostrazione. Chiamiamo $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Osserviamo che $X_n \subseteq Y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in particolare $X_0 = X \subseteq Y$. Mostriamo che Y è un sottouniverso. Sia $f^{\mathscr{A}}$ un'operazione k-aria e siano $a_1, \dots, a_n \in Y$. Per definizione di Y deve esistere $\overline{n}$ tale che $a_1, \dots, a_k \in X_{\overline{n}}$, ma allora $f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_k) \in X_{\overline{n}+1} \subseteq Y$. Quindi Y è un sottouniverso contenente X, ne segue che $\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) \subseteq Y$.
Riguardo l'altra inclusione mostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $X_n \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ procedendo per induzione su n. Per il passo base abbiamo che $X_0 = X \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$. Assumiamo ora che $X_n \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ e dimostramo che $X_{n+1} \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$. Sia $b \in X_{n+1} \setminus X_n$, allora per definizione di X_{n+1} esisteranno $f^{\mathscr{A}}$ operazione k-aria e $a_1, \dots, a_k \in X_n$ tali che $b = f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_k)$. Quindi, per ipotesi induttiva $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$, ma $\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ è un sottouniverso, quindi $b \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$. □

Corollario 1.20. *Siano $\mathscr{A}$ e X come nel teorema precedente e sia $a \in A$, allora*

$$a \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) \Leftrightarrow \exists Y \subseteq_\omega X \text{ tale che } a \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(Y)$$

dove il simbolo $\subseteq_\omega$ indica che $Y \subseteq X$ e Y è finito.

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Per il teorema precedente se $a \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ esiste X_n tale che $a \in X_n$. Supponiamo che questo sia il minimo per cui ciò accade. Procediamo per induzione su n. Passo base: se $n = 0$ allora $a \in X_0 = X$. In questo caso si può prendere $Y = \{a\}$. Sia ora $n = m + 1$. Quindi devono esistere un'operazione k-aria $f^{\mathscr{A}}$ e $a_1, \dots, a_k \in X_m$ tali che $a = f^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_k)$. Per ipotesi induttiva $\exists Y_1, \dots, Y_k \subseteq_\omega \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ tali che $a_i \in \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(Y_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Allora basta prendere $Y := Y_1 \cup \dots \cup Y_k$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Basta mostrare che in generale se $Y \subseteq X \Rightarrow \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(Y) \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$.

□

Definizione 1.21

Diremo che una sottoalgebra $\mathscr{B}$ di un'algebra $\mathscr{A}$ è **finitamente generata** se esiste $Y \subseteq A$ sottoinsieme finito tale che $B = \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(Y)$.

1.3 CONGRUENZE

Se A chiamiamo **relazione n-aria** su A semplicemente un sottoinsieme del prodotto cartesiano A^n. Definiamo $0_A := \{(x, x) \mid x \in A\}$ e $1_A := A \times A$. Date due relazioni binarie θ e φ su A, è possibile definire delle nuove relazioni binarie a partire da queste nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\theta \circ \varphi &:= \{(x,y) \mid \exists\, z \text{ t.c } (x,z) \in \theta\ (z,y) \in \varphi\} \\ \theta^{\smile} &:= \{(y,x) \mid (x,y) \in \theta\}\end{aligned}$$

Esercizio 1.22. Siano θ e φ due relazioni su A e $\{\theta_i \mid i \in I\}$ una famiglia di relazioni su A. Dimostrare che:

1. $(\theta\,;\varphi)^{\smile} = \varphi^{\smile}\,;\theta^{\smile}$
2. $(\bigcup_{i\in I}\theta_i)^{\smile} = \bigcup_{i\in I}(\theta_i^{\smile})$
3. $\varphi\,;(\bigcup_{i\in I}\theta_i) = \bigcup_{i\in I}(\varphi\,;\theta_i)$ e $(\bigcup_{i\in I}\theta_i)\,;\varphi = \bigcup_{i\in I}(\theta_i\,;\varphi)$.

Definizione 1.23

Una relazione θ è detta di **equivalenza** su A se è

1. riflessiva, ovvero $0_A \subseteq \theta$,
2. simmetrica, ovvero $\theta^{\smile} \subseteq \theta$,
3. transitiva, ovvero $\theta\,;\theta \subseteq \theta$.

Se θ è una relazione di equivalenza su A, per ogni $a \in A$ indicheremo la **classe di equivalenza** di a con

$$a/\theta := \{b \in A \mid (a,b) \in \theta\}$$

e l'**insieme delle classi di equivalenza** con

$$A/\theta := \{a/\theta \mid a \in A\}.$$

Come casi limite abbiamo:

- $a/0_A = \{a\}$, quindi $A/0_A = \{\{a\} \mid a \in A\} \cong A$
- $a/1_A = A$, quindi $A/1_A = \{A\}$, cioè l'algebra banale con un solo elemento.

Data una relazione di equivalenza θ su A è sempre possibile definire una mappa $q_\theta\colon A \to A/\theta$, detta **quoziente canononico su θ** che manda $a \in A \mapsto a/\theta$. Si noti che q_θ è sempre suriettiva.

Definizione 1.24

Se $f\colon A \to B$ è una funzione, si definisce il **kernel** (o **nucleo**) di f:

$$\ker f := \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$$

Lemma 1.25. *Per ogni funzione f, la relazione $\ker f$ è di equivalenza. Viceversa, ogni relazione di equivalenza è il kernel di qualche funzione.*

Dimostrazione. Il fatto che $\ker f$ sia riflessiva, simmetrica e transitiva discende facilmente dalla sua dedizione. Per il viceversa, sia θ una relazione di equivalenza su un insieme A e sia $q_\theta\colon A \to A/\theta$ il quoziente canononico definito sopra. Verifichiamo che

$$\theta = \ker q_\theta \tag{1}$$

Applicando le varie definizioni si ha che $(a, b) \in \ker q_\theta$ se e soltanto se $q_\theta(a) = q_\theta(b)$ se soltanto se $a/\theta = b/\theta$ se e soltanto se $(a, b) \in \theta$. Dunque la (1) è verificata. □

Passiamo ora alle algebre e consideriamo un omomorfismo $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ Abbiamo visto che $\ker h$ è una relazione d'equivalenza. Ci chiediamo se ha delle proprietà aggiuntive. Vediamo un esempio concreto.

Esempio 1.26. Consideriamo $\mathscr{A} = (A, \cdot)$, $\mathscr{B} = (B, \cdot)$ con $\rho(\cdot) = 2$. Siano $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$ tali che $(x_1, y_1) \in \ker h$ e $(x_2, y_2) \in \ker h$, ciò significa che $h(x_1) = h(y_1)$ e $h(x_2) = h(y_2)$. Allora $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2) = h(y_1) \cdot h(y_2) = h(y_1 \cdot y_2)$, quindi anche $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \in \ker h$.

Definizione 1.27

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F})$ un'algebra e $\theta \subseteq A^2$ una relazione binaria. Diremo che θ ha la **proprietà di sostituzione** (o è **compatibile con le operazioni**) se per ogni operazione n-aria fondamentale $f \in \mathcal{F}$ si ha

$$x_1 \,\theta\, y_1, \ldots, x_n \,\theta\, y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \,\theta\, f(y_1, \ldots, y_n) \tag{2}$$

Chiameremo **congruenza** su $\mathscr{A}$ ogni relazione di equivalenza con la proprietà di sostituzione rispetto a tutte le operazioni in $\mathcal{F}^A$.

La compatibilità con le operazioni una relazione di equivalenza θ su $\mathscr{A}$ è esattamente ciò di cui abbiamo bisogno per indurre una struttura di algebra nello stesso linguaggio di $\mathscr{A}$ sul quoziente A/θ.

Lemma 1.28. *Ogni congruenza è il kernel di qualche omomorfismo.*

Dimostrazione. Sia θ una congruenza arbitraria su un'algebra $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F})$. Consideriamo il quoziente canonico $q_\theta \colon A \to A/\theta$. Per il Per il esercizio 1.22 si ha che $\theta = \ker q_\theta$, dunque vorremmo che q_θ fosse un omomorfismo. A tal fine, per ogni $f \in \mathcal{F}$, definiamo un'operazione $f^{A/\theta}$ su A/θ in modo che q_θ sia un omomorfismo. Osserviamo che affinché q_θ sia un omomorfismo deve valere:

$$\begin{aligned} q_\theta(f^A(a_1,\dots,a_n)) &= f^A(a_1,\dots,a_n)/\theta && \text{per la definizione di } q_\theta \\ &= f^{A/\theta}(a_1/\theta,\dots,a_n/\theta) && \text{Affinché } q_\theta \text{ sia un omorfismo} \\ &= f^{A/\theta}(q_\theta(a_1),\dots,q_\theta(a_n)) && \text{er la definizione di } q_\theta \end{aligned}$$

Dunque definiamo:

$$f^{A/\theta}(a_1/\theta,\dots,a_n/\theta) := f^A(a_1,\dots,a_n)/\theta$$

Controlliamo infine che $f^{A/\theta}$ sia ben posta. Consideriamo quindi $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in A$ tali che $a_1\theta b_1,\dots,a_n\theta b_n$ e verifichiamo che $f^{A/\theta}(a_1/\theta,\dots,a_n/\theta) = f^{A/\theta}(b_1/\theta,\dots,b_n/\theta)$. In effetti per la (2) si ha

$$f^A(a_1,\dots,a_n) = f^A(b_1,\dots,b_n) \Leftrightarrow f^A(a_1,\dots,a_n)/\theta = f^A(b_1,\dots,b_n)/\theta$$

e quindi

$$f^{A/\theta}(a_1/\theta,\dots,a_n/\theta) = f^A(a_1,\dots,a_n)/\theta = f^A(b_1,\dots,b_n)/\theta = f^{A/\theta}(b_1/\theta,\dots,b_n/\theta)$$

□

Definizione 1.29

Se $\mathscr{A}$ è un'algebra tale che $0_\mathscr{A}$ e $1_\mathscr{A}$ sono le sue uniche congruenze, allora $\mathscr{A}$ è detta **semplice**.

Esempio 1.30. Sia $\mathscr{G}$ un gruppo, allora

1. Per ogni sottogruppo normale N, la relazione

$$\theta_N := \{(x,y) \in G^2 \mid y^{-1}x \in N\}$$

è una congruenza su $\mathscr{G}$ e il laterale destro $Nx = \{nx \mid n \in N\}$ coincide con la classe x/θ_N.

2. Per ogni congruenza θ su $\mathscr{G}$, la classe di equivalenza e/θ (dove e è l'elemento neutro del gruppo) è un sottogruppo normale.

3. La mappa $N \mapsto \theta_N$ è una biezione con inversa $\theta \mapsto e/\theta$.
   Inoltre $M \subseteq N$ se e soltanto se $\theta_M \subseteq \theta_N$.

Lemma 1.31. *Siano $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ e $g\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ omomorfismi con g suriettivo. Se $\ker g \subseteq \ker f$ allora esiste un omomorfismo $h\colon \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ tale che $f = h \circ g$.*

Dimostrazione. Per definire h scegliamo un arbitrario $c \in C$, poiché g è suriettivo esiste almeno un $a \in A$ tale che $g(a) = c$, definiamo $h(c) := f(a)$. Ovviamente dobbiamo verificare che la definizione di h non dipende dalla scelta di a. Supponiamo che esistano $a, a' \in A$ tali che $g(a) = g(a')$, questo implica che $(a, a') \in \ker g$, dunque per ipotesi $(aka') \in \ker f$ e ciò vuol dire che $f(a) = f(a')$. Il fatto che h verifichi l'equazione $f = h \circ g$ è immediato. □

Teorema 1.32 (Teorema fondamentale dell'omomorfismo)

Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due algebre, $h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo e $\theta = \ker h$.
Esiste un unico omomorfismo iniettivo $\overline{h}\colon \mathscr{A}/\theta \to \mathscr{B}$ tale che $h = \overline{h} \circ q_\theta$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "q_\theta"'] & & \mathscr{B} \\ & \mathscr{A}/\theta \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre se h è un epimorfismo, allora $\overline{h}$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Poiché vogliamo che valga $h(a) = \overline{h} \circ q_\theta(a) = \overline{h}(a/\theta)$, definiamo necessariamente $\overline{h}(a/\theta) := h(a)$. Notiamo che, in questo modo, $\overline{h}$ è ben definita ed iniettiva in quanto $a/\theta = b/\theta$ se e soltanto se $a\theta b$ se e soltanto se $(a, b) \in \ker h$ se e soltanto se $h(a) = h(b)$ se e soltanto se $\overline{h}(a/\theta) = \overline{h}(b/\theta)$.
Mostriamo che $\overline{h}$ è un omomorfismo. Sia f un simbolo di funzione n-aria e siano $a_1, \ldots, a_n \in A$. Allora si ha $\overline{h}(f^{\mathscr{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta)) = \overline{h}(f^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta) = h(f^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathscr{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathscr{B}}(\overline{h}(a_1/\theta), \ldots, \overline{h}(a_n/\theta))$. □

Proposizione 1.33. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra, Θ una collezione di congruenze su $\mathscr{A}$ non vuota. Allora $\bigcap \Theta$ è una congruenza.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $\bigcap \Theta$ è una relazione d'equivalenza:

- $0_A \subseteq \theta$ per ogni congruenza $\theta \in \Theta \Rightarrow 0_A \subseteq \bigcap \Theta$ ovvero $\bigcap \Theta$ è riflessiva;
- $(x, y) \in \bigcap \Theta \Rightarrow (x, y) \in \theta \ \forall\ \theta \in \Theta$, ma le θ sono tutte congruenze, quindi $(y, x) \in \theta \ \forall\ \theta \in \Theta \Rightarrow (x, y) \in \bigcap \Theta$ ovvero $\bigcap \Theta$ è riflessiva;

- analogamente $(x,y) \in \bigcap\Theta$ e $(y,z) \in \bigcap\Theta \Rightarrow (x,y) \in \theta$ e $(y,z) \in \theta\ \forall\, \theta \in \Theta \Rightarrow$ (per la transitività delle congruenze θ) $(x,z) \in \theta\ \forall\, \theta \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \bigcap\Theta$ cioè $\bigcap\Theta$ è transitiva.

Verifichiamo infine la compatibilità con le operazioni. Siano f un'operazione fondamentale n-aria in $\mathscr{A}$ e $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n) \in \bigcap\Theta$ se e soltanto se $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n) \in \theta\ \forall\ \theta \in \Theta$. Essendo ogni θ una congruenza avremo $f(x_1,\dots,x_n)\theta f(y_1,\dots,y_n)$, di conseguenza $(f(x_1,\dots,x_n), f(y_1,\dots,y_n)) \in \bigcap\Theta$. □

Definizione 1.34

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\nu \subseteq A \times A$. La **congruenza generata** da ν è definita come segue:

$$Cg^{\mathscr{A}}(\nu) := \bigcap_{\substack{\theta \in \mathrm{Con}\,\mathscr{A} \\ \nu \subseteq \theta}} \theta$$

Notazione 1.35. Se indichiamo con $\bar{a} := (a_1,\dots,a_n)$ e $\bar{b} := (b_1,\dots,b_n)$ scriveremo $\bar{a}\ \theta\ \bar{b}$ per indicare che $a_1\ \theta\ b_1,\dots,a_n\ \theta\ b_n$. Con questa notazione la proprieta di sostituzione diventa:

$$\bar{a}\ \theta\ \bar{b} \Rightarrow f(\bar{a})\ \theta\ f(\bar{b}) \tag{3}$$

Teorema 1.36

Sia $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F})$ un'algebra e $\nu \subseteq A \times A$. Definiamo ricorsivamente:

$$\begin{aligned} \nu_0 &:= \nu \cup \nu^{\smile} \cup 0_{\mathscr{A}} \\ \nu_{n+1} &:= (\nu_n\,;\nu_n) \cup \{(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \mid f \in \mathcal{F} \text{ e } \bar{a}\,\nu_n\,\bar{b}\} \end{aligned}$$

Allora

$$Cg^{\mathscr{A}}(\nu) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$$

Dimostrazione. Sia $\psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n$. Dobbiamo verificare tre cose:

1. $\nu \subseteq \psi$
2. ψ è una congruenza
3. $\theta \in Con\mathscr{A}$ e $\nu \subseteq \theta \Rightarrow \psi \subseteq \theta$

Infatti dai primi due punti segue che $Cg^{\mathscr{A}}\nu \subseteq \psi$, mentre dal terzo si ha $\psi \subseteq Cg^{\mathscr{A}}$.
Il primo punto è vero perché $\nu \subseteq \nu_0 \subseteq \psi$.
Per dimostrare il secondo punto definiamo $\sigma_n := \{(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \mid f \in \mathcal{F} \text{ e } \bar{a}\,\nu_n\,\bar{b}\}$. Quindi $\nu_{n+1} = (\nu_n\,;\nu_n) \cup \sigma_n$. Mostriamo che ψ è una congruenza:

(i) Si noti che $\nu_n = \nu_n\,;0_{\mathscr{A}} \subseteq \nu_n\,;\nu_n \subseteq \nu_{n+1} \subseteq \psi$ per ogni $n \geq 0$, quindi $0_{\mathscr{A}} \subseteq \psi$.

(ii) Dimostriamo per induzione su n che $\nu_n^{\smile} \subseteq \nu_n$. Il passo base è ovvio. Per il passo induttivo notiamo che $\nu_{n+1}^{\smile} = ((\nu_n\,;\nu_n) \cup \sigma_n)^{\smile} = (\nu_n^{\smile}\,;\nu_n^{\smile}) \cup \sigma_n^{\smile} \subseteq (\nu_n\,;\nu_n) \cup \sigma_n = \nu_{n+1}$ dove la seconda uguaglianza vale per l'esercizio 1.22 e l'inclusione vale per ipotesi induttiva. Quindi, sfruttando ancora l'1.22 otteniamo che $\psi^{\smile} = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n)^{\smile} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n^{\smile} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n = \psi$.

(iii) Per la transitività osserviamo che $\psi\,;\psi = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n)\,;(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_n) = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}}(\nu_i\,;\nu_j) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\nu_n\,;\nu_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \nu_{n+1} = \psi$ dove la seconda uguaglianza discende ancora da 1.22 e la prima inclusione sfrutta l'osservazione che $\nu_i\,;\nu_j \subseteq \nu_n\,;\nu_n$ se $n = \max\{i,j\}$.

(iv) Mostriamo ora che ψ ha la proprietà di sostituzione. Siano $(\bar{a}, \bar{b}) \in \psi$, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $(\bar{a}, \bar{b}) \in \nu_k$. Quindi $(f(\bar{a}), f(\bar{b})) \in \nu_{k+1} \subseteq \psi$.

Infine per verificare il terzo punto supponiamo che $\theta \in \mathtt{Con}(\mathscr{A})$ e $\nu \subseteq \theta$. Per induzione su n si vede che $\nu_n \subseteq \theta$. Infatti $\nu_0 = (\nu\,;\nu^{\smile}) \cup 0_{\mathscr{A}} \subseteq \theta$ e se $\nu_n \subseteq \theta$ allora $\nu_{n+1} \subseteq \theta$. Ma quindi $\psi \subseteq \theta$ che è quanto volevamo. □

Esercizio 1.37. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\theta \subseteq A \times A$. Si provi che θ ha la proprietà di sostituzione se e soltanto se θ è un sottouniverso di $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$.

Esercizio 1.38. Sia $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo. Si provi che f è iniettivo se soltanto se $\ker f = 0_{\mathscr{A}}$.

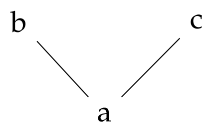
2

TEORIA DEI RETICOLI

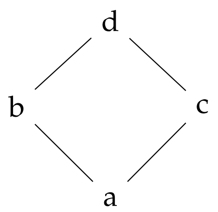
Definizione 2.1

Un **ordine parziale** su un insieme P è una relazione binaria riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Un'ordine $\leq$ è detto **totale** o (**lineare**) se $\forall\ x, y$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$.

Esempio 2.2. Presentiamo alcuni esempi di ordini parziali che possono essere rappresentati attraverso i **diagrammi di Hasse**.



$P = \{a, b, c\}$
$\leq = \{(a, b), (a, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$
$(P, \leq)$ è un ordine parziale.



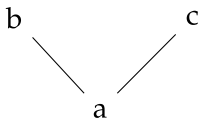
$Q = \{a, b, c, d\}$
$\leq = 0_Q \cup \{(a, c), (a, b), (c, d), (b, d), (a, d)\}$
$(Q, \leq)$ è un ordine parziale.

Esercizio 2.3. Si provi che se $(P, \leq)$ è un ordine parziale, allora lo è anche il suo **duale** $(P, \leq^{\smile})$.

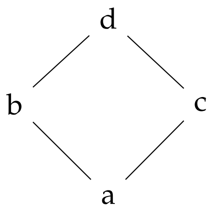
Definizione 2.4

Un ordine parziale si dice **reticolare** se per ogni coppia di elementi (a, b) esistono $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$.

Esempio 2.5. Verifichiamo se gli ordini parziale dell'esempio 2.2 sono reticolari:



$(P, \leq)$ non è reticolare perché non esiste $\sup\{b, c\}$.



$(Q, \leq)$ è un ordine reticolare, infatti si ha che $\inf\{a, b\} = \inf\{a, c\} = \inf\{a, d\} = a$, $\inf\{b, d\} = b$, $\inf\{c, d\} = c$, $\sup\{a, b\} = b$, $\sup\{a, c\} = c$, $\sup\{a, d\} = \sup\{b, d\} = \sup\{c, d\} = d$.

Esempio 2.6. Altri esempi di ordini reticolari sono:

1. Tutti gli ordini totali, ad esempio: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, etc.

2. Gli interi con l'ordine di divisibilità tra di essi: $n \preceq m$ se e soltanto se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $nk = m$. Si osservi che 0 è il massimo in questo ordine.

3. Dato un qualsiasi insieme S, il suo insieme potenza è ordinato reticolarmene dall'inclusione.

4. I prodotti di ordini reticolari, con l'ordine definito componente per componente, ad esempio: $(\mathbb{N}^k, \leq)$, $(\mathbb{R}^k, \leq)$, etc.

5. Le potenze di ordini reticolari, con l'ordine definito componente per componente, ad esempio: $(\mathbb{N}^\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, \leq)$ etc.

Definizione 2.7

Un **reticolo** è un'algebra $(\mathscr{L}, \wedge, \vee)$ che soddisfa:

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	**Associatività**
$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$	**Commutatività**
$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$	**Idempotenza**
$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$	**Assorbenza**

Teorema 2.8

Dato un'ordine reticolare $(P, \leq)$, si ottiene un reticolo $(P, \wedge, \vee)$ definendo:

$$x \wedge y := \inf\{x, y\} \quad e \quad x \vee y := \sup\{x, y\},$$

dove inf *e* sup *sono presi rispetto all'ordine $\leq$. Viceversa, ogni reticolo $(L, \wedge, \vee)$ è reticolarmente ordinato dalla relazione definita da*

$$x \leq y \overset{\text{definition}}{\iff} x \wedge y = x \quad (\text{o equivalentemente } x \vee y = y)$$

Ciò fornisce una corrispondenza biunivoca tra reticoli e ordini reticolari.

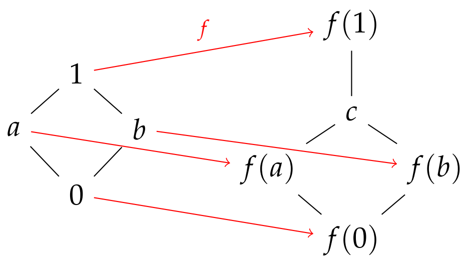
Definizione 2.9

Siano $(P, \leq^P)$ e $(Q, \leq^Q)$ due ordini parziali e $f \colon P \to Q$. Diremo che f e **monotona** (o **isotona**, o che **preserva l'ordine**) se per ogni $x, y \in P$ vale

$$x \leq^P y \Rightarrow f(x) \leq^Q f(y)$$

Osservazione 2.10. Ogni omomorfismo di reticolo preserva l'ordine (reticolare associato dal teorema 2.8). Il viceversa in generale non vale, come si evince dal prossimo esempio.

Esempio 2.11. Consideriamo i due reticoli e la funzione f tra di essi definiti come in figura.



Si osservi che f preserva l'ordine, ma non è un omomorfismo di reticoli, infatti $c = f(a) \vee f(b) \neq f(a \vee b) = f(1)$

Lemma 2.12. *Se $f \colon \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ è una funzione tra due reticoli monotona, biettiva e tale che f^{-1} è anch'essa monotona, allora f è un omomorfismo di reticoli.*

Dimostrazione. Verifichiamo che f commuta con il $\wedge$. Siano $a, b \in P$ e $c := a \wedge b$. Allora $c \leq a, b$ e quindi $f(c) \leq f(a), f(b)$. Inoltre se $x \leq f(a), f(b)$, allora $f^{-1}(x) \leq a, b$. Ma c è il più grande dei minoranti di $\{a, b\}$, quindi $f^{-1}(x) \leq c \Rightarrow$ e applicando f otteniamo $x \leq f(c)$. Dunque $f(c)$ è il più grande dei minoranti di $\{f(a), f(b)\}$, ovvero $f(a \wedge b) = f(c) = f(a) \wedge f(b)$. Analogamente si verifica che f commuta con il $\vee$. $\square$

Esempio 2.13. Alcuni esempi di reticoli.

- L'insieme $\mathtt{Sub}\,\mathscr{A}$ dei sottouniversi di un'algebra $\mathscr{A}$, con il meet dato dall'intersezione di sottouniversi e il join dato dal sottouniverso generato dall'unione. In simboli, se $B, C \in \mathscr{A}$ definiamo
  - $B \wedge C := B \cap C$ e
  - $B \vee C := \mathtt{Sg}^{\mathscr{A}}(B \cup C)$.
- L'insieme $\mathtt{Con}\,\mathscr{A}$ delle congruenze di un'algebra $\mathscr{A}$, con il meet dato da intersezione di congruenze e il join dato dalla congruenza generata dall'unione. In simboli, se $\theta, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$, definiamo
  - $\theta \wedge \psi := \theta \cap \psi$ e
  - $\theta \vee \psi = Cg^{\mathscr{A}}(\theta \cup \psi)$.

Definizione 2.14

Un reticolo $\mathscr{L}$ è detto **completo** se per ogni $X \subseteq \mathscr{L}$ esistono $\bigwedge X$ e $\bigvee X$.

2.1 OPERATORI DI CHIUSURA E RETICOLI

Definizione 2.15

Dato un ordine parziale $(P, \leq)$, una funzione $C\colon P \to P$ è detto **operatore di chiusura** se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $X \subseteq C(X)$ (**espansività**),
2. $Y \subseteq X \Rightarrow C(Y) \subseteq C(X)$ (**idempotenza**),
3. $C(C(X)) = C(X)$ (**monotonia**).

Se inoltre C soddisfa

4. $C(X) = \bigcup\{C(Z) \mid Z \subseteq_\omega X\}$ (**finitarietà**).

è detto operatore di chiusura **finitario** (o **algebrico**).

Esercizio 2.16. Dimostrare che $\mathscr{A}$, $\mathtt{Sg}^{\mathscr{A}}(X)$ e $Cg^{\mathscr{A}}(X)$ sono un operatori di chiusura algebrici.

Proposizione 2.17. *Dato un insieme A e un operatore di chiusura $C\colon \wp(A) \to \wp(A)$ si può sempre definire un reticolo completo $\mathscr{L}_C$. Viceversa dato un reticolo completo $\mathscr{L}$ si può sempre definire un operatore di chiusura $C_{\mathscr{L}}\colon \wp(\mathscr{L}) \to \wp(\mathscr{L})$ e inoltre $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}_{\mathscr{C}_{\mathscr{L}}}$.*

Dimostrazione. Proviamo la prima affermazione. Consideriamo quindi un operatore di chiusura $C\colon \wp(A) \to \wp(A)$ e poniamo

$$\mathscr{L}_C := \{B \subseteq A \mid C(B) = B\} = \{B \subseteq A \mid \exists D \subseteq A \text{ tale che } C(D) = B\}. \tag{4}$$

Si noti che le due maniere di descrivere l'insieme date in (4) sono effettivamente equivalenti. Infatti se $C(B) = B$ allora esiste $D \subseteq A$ tale che $C(D) = B$, basta porre $D := B$. Viceversa, se esiste $D \subseteq A$ tale che $C(D) = B$ allora $C(B) = C(C(D)) = C(D) = B$, usando l'idempotenza di C. Mostriamo ora che $\mathscr{L}_C$ è un reticolo completo rispetto all'ordine dato dall'inclusione tra insiemi. Sia $\{B_i \mid i \in I\}$ una famiglia di elementi di $\mathscr{L}_C$, asseriamo che il meet di $\{B_i \mid i \in I\}$ è dato dall'intersezione, in simboli $\bigwedge_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I} B_i$. Ovviamente l'intersezione è il massimo dei maggioranti della famiglia $\{B_i \mid i \in I\}$ rispetto all'inclusione, quindi basta far vedere che l'intersezione appartiene a $\mathscr{L}_C$. Abbiamo che $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_i$ per ogni $i \in I$, quindi $C(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq C(B_i) = B_i$ per ogni $i \in I$. Ne segue che $C(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$. Inoltre, per l'espansività di C si ha $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq C(\bigcap_{i\in I} B_i)$, dunque $\bigcap_{i\in I} B_i = C(\bigcap_{i\in I} B_i)$.

Inoltre si ha che $\bigvee_{i\in I} B_i = C(\bigcup_{i\in I} B_i)$. Infatti, ovviamente $C(\bigcup_{i\in I} B_i)$ appartiene a $\mathscr{L}_C$ ed è un maggiorante per la famiglia $\{B_i \mid i \in I\}$; rimane da mostrare che è il minimo dei maggioranti. Se Y è un elemento di $\mathscr{L}_C$ tale che $B_i \subseteq Y$ per ogni $i \in I$ allora vale anche $\bigcup_{i\in I} B_i \subseteq Y$ e per la monotonia di C si ha $c(\bigcup_{i\in I} B_i) \subseteq C(Y) = Y$, quindi $c(\bigcup_{i\in I} B_i)$ è il minimo dei maggioranti.

Viceversa se $\mathscr{L}$ è un reticolo completo, definiamo un operatore $C_{\mathscr{L}}\colon \wp(\mathscr{L}) \to \wp(\mathscr{L})$ come segue. Per ogni $x \in \mathscr{L}$ poniamo

$$(x] := \{y \in \mathscr{L} \mid y \leq x\}.$$

Definiamo quindi, per ogni $X \subseteq \mathscr{L}$,

$$C_{\mathscr{L}}(X) := (\bigvee X].$$

Proviamo che $C_{\mathscr{L}}$ è un operatore di chiusura.

1. Se $x \in X$, allora $x \leq \bigvee X$ e quindi $x \in (\bigvee X] = C_{\mathscr{L}}(X)$. Dunque $X \subseteq C_{\mathscr{L}}(X)$.

2. Vogliamo mostrare che $C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(X)) = C_{\mathscr{L}}(X)$. Per l'espansività (provata al punto precedente) $C_{\mathscr{L}}(X) \subseteq C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(X))$. Per l'altra inclusione consideriamo $x \in C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(X))$. Questo vuol dire che $x \in (\bigvee C_{\mathscr{L}}(X)]$, cioè $x \leq \bigvee C_{\mathscr{L}}(X) \Rightarrow x \leq \bigvee(\bigvee X] = \bigvee X \Rightarrow x \in (\bigvee X] = C_{\mathscr{L}}(X)$. Di conseguenza $C_{\mathscr{L}}(C_{\mathscr{L}}(X)) \subseteq C_{\mathscr{L}}(X)$.

3. Supponiamo che $X \subseteq Y$ e consideriamo $x \in C_{\mathscr{L}}(X) = (\bigvee X]$. Allora $x \leq \bigvee X \leq \bigvee Y$ (essendo $X \subseteq Y$), quindi $x \in (\bigvee Y] = C_{\mathscr{L}}(Y)$. Abbiamo quindi provato che $X \subseteq Y \Rightarrow C_{\mathscr{L}}(X) \subseteq C_{\mathscr{L}}(Y)$.

Infine l'isomorfismo da $\mathscr{L}$ in $\mathscr{L}_{\mathscr{C}_{\mathscr{L}}}$ è dato dalla mappa $x \mapsto (x]$. La verifica è lasciata al lettore per esercizio. $\square$

Definizione 2.18

Sia $\mathscr{L}$ un reticolo completo. Diremo che

1. un elemento $a \in \mathscr{L}$ è **compatto** se per ogni $X \subseteq \mathscr{L}$ vale
$$a \leq \bigvee X \Rightarrow \exists Y \subseteq_{\text{fin}} X \text{ tale che } a \leq \bigvee Y;$$
2. $\mathscr{L}$ è **algebrico** se ogni suo elemento è il join di elementi compatti.

Osservazione 2.19. Il reticolo delle congruenze e il reticolo dei sottouniversi di un'algebra $\mathscr{A}$ sono reticoli algebrici. Gli elementi compatti di questi reticoli sono rispettivamente le congruenze finitamente generate e i sottouniversi finitamente generati. Infatti $Cg^{\mathscr{A}}(\nu) = \bigvee_{\nu_i \subseteq_{\text{fin}} \nu} Cg^{\mathscr{A}}(\nu_i)$ e $\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) = \bigvee_{X_i \subseteq_{\text{fin}} X} \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X_i)$.

Teorema 2.20

Se C è un'operatore di chiusura algebrico su un insieme A, allora $\mathscr{L}_C$ è un reticolo algebrico i cui elementi compatti sono della forma $C(Y)$ per $Y \subseteq_{fin} A$.

Dimostrazione. Cominciamo mostrando che se $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq A$ è finito allora $C(Y)$ è compatto. Supponiamo che $C(Y) \leq \bigvee \mathcal{Z}$ con $\mathcal{Z} \subseteq \mathscr{L}_C$. Allora

$$C(Y) \leq \bigvee \mathcal{Z} = C(\bigcup \mathcal{Z}) = \bigcup \{C(W) \mid W \subseteq_{\text{fin}} \bigcup \mathcal{Z}\},$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché C è algebrico. Siccome $Y \subseteq C(Y)$, per ogni $i \leq n$ deve esistere $W_i \subseteq_{\text{fin}} \bigcup \mathcal{Z}$ tale che $y_i \in C(W_i)$. Poniamo $\overline{W} := W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$, allora $Y \subseteq \bigcup_{i \leq n} C(W_i) \subseteq C(\overline{W})$ perché C è monotono. Sfruttando ancora la monotonia di C e la sua idempotenza otteniamo $C(Y) \subseteq C(\overline{W})$. Ma $\overline{W} \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$ è finito, quindi deve esistere una sottofamiglia finita $\mathcal{V}$ di $\mathcal{Z}$ tale che $\overline{W} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$. Di conseguenza otteniamo

$$C(Y) \subseteq C(\overline{W}) \subseteq C(\bigcup \mathcal{V}) = \bigvee \mathcal{V}.$$

Viceversa, se X è un elemento compatto di $\mathscr{L}_C$ allora

$$X = C(X) = \bigcup \{C(Z) \mid Z \subseteq_{\text{fin}} X\} = C(\bigcup \{C(Z) \mid Z \subseteq_{\text{fin}} X\}) = \bigvee \{C(Z) \mid Z \subseteq_{\text{fin}} X\}.$$

Poiché X è compatto per ipotesi, devono esistere $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq_{\text{fin}} X$ tali che

$$X = \bigvee_{i=1}^{n} C(Z_i) = C(\bigcup_{i=1}^{n} Z_i).$$

Ne concludiamo che X è della forma $C(Z)$ con Z finito. Infine mostriamo che $\mathscr{L}_c$ è un reticolo algebrico. Sia $X \in \mathscr{L}_C$, allora

$$X = C(X) = \bigvee\{C(Z) \mid Z \subseteq_{\text{fin}} X\}.$$

E, per quanto dimostrato sopra, ciò mostra che X è un join di elementi compatti di $\mathscr{L}_C$. □

2.2 CONNESSIONI DI GALOIS

Tra il concetto, molto debole, di funzione che preserva l'ordine e quello, molto forte, di isomorfismo di ordini parziali ce n'é uno molto ricco e comune in matematica che prende il nome di connessione di Galois.

Definizione 2.21

Dati due insiemi parzialmente ordinati $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$, diremo che due funzioni $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to A$ formano una **connessione di Galois monotona** se, per ogni $a \in A$ e $b \in B$, vale

$$f(a) \leq_B b \text{ se e soltanto se } a \leq_A g(b). \tag{5}$$

In questo caso la funzione f verrà detta **aggiunto sinistro** e la funzione g **aggiunto destro** e scriveremo $f \dashv g$. Per le connessioni di Galois monotone, valgono le seguenti interessanti proprietà.

Lemma 2.22. *Siano $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ e f e g una connessione di Galois tra di essi con $f \dashv g$. Per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, valgono le seguenti proprietà.*

1. $a \leq gf(a)$ *e* $fg(b) \leq b$.
2. *Le funzione f e g preservano l'ordine.*
3. $f(a) = fgf(a)$ *e* $g(b) = gfg(b)$.
4. *Le funzioni composte fg e gf sono idempotenti, cioè*

$$(fg)(fg)(b) = fg(b) \text{ e } (gf)(gf)(a) = gf(a).$$

Dimostrazione. 1 Per ogni $a \in A$, $a \leq gf(a)$ se e soltanto se $f(a) \leq f(a)$ e, analogamente, per ogni $b \in B$, $fg(b) \leq b$ se e soltanto se $g(b) \leq g(b)$.

2. Se $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$, applicando la Punto 2 e Punto 1, si ha che $a_1 \leq a_2 \to a_1 \leq gf(a_2) \leftrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Analogamente, $b_1 \leq b_2 \to fg(b_1) \leq b_1 \leftrightarrow fg(b_1) \leq b_2 \leftrightarrow g(b_1) \leq g(b_2)$.

3. Per Punto 1 e Punto 2, si ha $f(a) \leq fgf(a)$. Inoltre, se si applica Punto 1 ponendo $b = f(a)$, si ha che $fgf(a) \leq f(a)$. L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo. $\square$

Dal lemma precedente, si deduce che, se f e g formano una connessione di Galois (monotona), allora fg è un operatore di chiusura e gf è un operatore di interno.

Lemma 2.23. *Sia $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq A$. Se $f\colon A \to B$ è aggiunto sinistro in una connessione di Galois (f, g), con $g\colon B \to A$, allora, se esiste $\bigvee_{i \in I} a_i$, si ha che $f(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} f(a_i)$.*

Dimostrazione. Per ogni $i \in I$, $a_i \leq \bigvee_{i \in I} a_i$ per definizione. Per Punto 2, $f(a_i) \leq f(\bigvee_{i \in I} a_i)$, dunque $f \bigvee_{i \in I} a_i$ è un maggiorante per $\{f(a_i)\}_{i \in I}$.
Sia, ora, $y \in B$ tale che $f(a_i) \leq y$. Allora, per la Definizione 2.21, $a_i \leq g(y) \forall i \in I$, quindi $g(y)$ è un maggiorante per $\{a_i\}_{i \in I}$. Ma allora, $\bigvee_{i \in I} a_i \leq g(y)$ e, di nuovo per la Definizione 2.21, si ha $f(\bigvee_{i \in I} a_i) \leq y$. Abbiamo così provato che $f(\bigvee_{i \in I} a_i)$ è il minimo dei maggioranti di $\{f(a_i)\}_{i \in I}$ e, dunque, la tesi. $\square$

Un risultato analogo si ha per l'aggiunto destro ed è il seguente.

Lemma 2.24. *Sia $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq B$. Se $g\colon B \to A$ è aggiunto destro in una connessione di Galois (f, g), con $f\colon A \to B$, allora $g(\bigwedge_{i \in I} b_i) = \bigwedge_{i \in I} g(b_i)$, se $\bigwedge_{i \in I} b_i$ esiste.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Lemma 2.25. *Siano $(A, \leq_A)$ e $(B, \leq_B)$ due insiemi parzialmente ordinati ed f una qualsiasi funzione da A in B. Se h e g sono funzioni da B in A tali che $f \dashv g$ e $f \dashv h$ allora $g = h$.*

Dimostrazione. Siccome $f \dashv h$, dal punto 1 del Lemma 2.22 otteniamo $f(h(b)) \leq b$. Inoltre, applicando la (5) alla connessione di Galois $f \dashv g$ con $a = h(b)$ si ha: $f(h(b)) \leq b$ se e soltanto se $h(b) \leq g(b)$. Dunque per ogni $b \in B$ vale $h(b) \leq g(b)$. Simmetricamente, siccome $f \dashv g$, dal punto 1 del Lemma 2.22 otteniamo $f(g(b)) \leq b$. Inoltre, applicando la (5) alla connessione di Galois $f \dashv h$ con $a = g(b)$ si ha: $f(g(b)) \leq b$ se e soltanto se $g(b) \leq h(b)$. In conclusione, per ogni $b \in B$ vale $h(b) = g(b)$ e il lemma è dimostrato. $\square$

Dati due reticoli completi $(A, \wedge, \vee)$ e $(B, \wedge, \vee)$ e una funzione $f\colon A \to B$ che preserva i join arbitrari, è possibile definire una funzione $g\colon B \to A$ tale che f e g formino una connessione di Galois monotona, come stabilisce il seguente risultato.

Lemma 2.26. *Siano $(A, \wedge, \vee)$ e $(B, \wedge, \vee)$ due reticoli completi. Se $f\colon A \to B$ preserva i sup, allora è aggiunto sinistro in una connessione di Galois (monotona).*

Dimostrazione. Definiamo, per ogni $b \in B$,

$$g(b) := \bigvee \{z \in A \mid f(z) \leq b\}$$

e proviamo che, con g così definita, otteniamo una connessione di Galois (monotona). Se $f(a) \leq b$, allora $a \in \{z \in A \mid f(z) \leq b\}$ e quindi, banalmente, $a \leq \bigvee\{z \in A \mid f(z) \leq b\}$, cioè $a \leq g(b)$. Per provare il viceversa, osserviamo che f è monotona. Infatti, se $a_1, a_2 \in A$ sono tali che $a_1 \leq a_2$, si ha che $a_1 \vee a_2 = a_2$. Di conseguenza, $f(a_1 \vee a_2) = f(a_2) = f(a_1) \vee f(a_2)$ e quindi $f(a_1) \leq f(a_2)$.
Supponiamo ora che $a \leq g(b)$. Per quanto appena osservato, $f(a) \leq f(\bigvee\{z \in A \mid f(z) \leq b\}) = \bigvee\{f(z) \mid f(z) \leq b\} = b$. In conclusione, f e g soddisfano l'(5) e dunque formano una connessione di Galois. $\square$

Esempio 2.27. Siano X, Y insiemi, sia $f(X)$ il più piccolo (o la più piccola) sottogruppo (o ideale, o sottalgebra...) contenente X e sia $g(Y) =$ "insieme soggiacente a Y". Provare che $f \dashv g$.

Osservazione 2.28. Siano X, Y due insiemi e sia $f \colon X \to Y$. Presi $M \subseteq X$ e $N \subseteq Y$, definiamo l'operatore **immagine diretta** $\overrightarrow{f} : \wp(A) \to \wp(B)$ come segue:

$$\overrightarrow{f}(M) = \{y \in Y \mid \exists x \in M \text{ tale che } y = f(x)\}$$

e l'operatore **immagine inversa** $\overleftarrow{f} : \wp(B) \to \wp(A)$ come segue:

$$\overleftarrow{f}(N) = \{x \in X \mid \exists y \in N \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

Sia, inoltre,

$$\mathring{f}(M) = \{y \mid f^{-1}(y) \subseteq M\}.$$

Una semplice verifica insiemistica prova che che $\overrightarrow{f} \dashv \overleftarrow{f} \dashv \mathring{f}$ dunque $\overleftarrow{f}$ è sia aggiunto sinistro che aggiunto destro. Ne consegue che:

1. $\overleftarrow{f}(X \cap Y) = \overleftarrow{f}(X) \cap \overleftarrow{f}(Y)$;
2. $\overleftarrow{f}(X \cup Y) = \overleftarrow{f}(X) \cup \overleftarrow{f}(Y)$;
3. $\overrightarrow{f}(\varnothing) = \varnothing$;
4. $\overleftarrow{f}(\varnothing) = \varnothing$;
5. $\overleftarrow{f}(B) = A$;
6. $\overrightarrow{f}(W \cup Z) = \overrightarrow{f}(W) \cup \overrightarrow{f}(Z)$;
7. $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(Y)) \subseteq Y$ (si noti che vale l'uguaglianza se f è suriettiva);

8. $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(X)) \supseteq X$ (si noti che vale l'uguaglianza se f è iniettiva).

In generale $\overrightarrow{f}$ non rispetta le intersezioni, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 2.29. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x - y$ e sia $X := \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $Y := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Allora $X \cap Y = \{(0,0)\}$ e $\{0\} = \overrightarrow{f}(X \cap Y) \neq \overrightarrow{f}(X) \cap \overrightarrow{f}(Y) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Abbiamo parlato di connessioni di Galois monotone, ma storicamente il termine *connessione di Galois* è stato riservato a coppie di funzioni **antitone**, cioè che invertono l'ordine invece di preservarlo. Per recuperare la definizione originaria, facciamo qualche semplice considerazione.

Osservazione 2.30. Dato un qualsiasi insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$, il suo duale $(P, \leq^{\smile})$ è ancora un insieme parzialmente ordinato; ovviamente in questo caso è più comune scrivere $\geq$ al posto di $\leq^{\smile}$. Similmente, se $(P, \leq)$ è un reticolo anche $(P, \geq)$ lo è, infatti $inf_{\leq}\{a,b\} = sup_{\geq}\{a,b\}$ e $sup_{\leq}\{a,b\} = inf_{\geq}\{a,b\}$, per ogni coppia di elementi $a, b \in P$.

La funzione identità da $(P, \leq)$ a $(P, \leq^{\smile})$ è tale che $p \leq q \leftrightarrow q \leq^{\smile} p$, cioè inverte l'ordine.

Definizione 2.31

Siano $(P, \leq)$ e $(Q, \preceq)$ due insiemi parzialmente ordinati. Una funzione $f\colon (P, \leq) \to (Q, \preceq)$ è detta **anti-isomorfismo** se è biettiva e verifica $p_1 \leq p_2$ se e soltanto se $f(p_2) \preceq f(p_1)$.

Definizione 2.32

Una **connessione di Galois antitona** tra $(A, \leq)$ e $(B, \preceq)$ è una connessione di Galois monotona tra $(A, \leq)$ e $(B, \preceq^{\smile})$.

Presi $a \in A$ e $b \in B$ e prese $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ che formano una connessione di Galois antitona, osserviamo che

$$f(a) \preceq^{\smile} b \text{ se e soltanto se } a \leq g(b)$$

equivale a

$$b \preceq f(a) \text{ se e soltanto se } a \leq g(b). \tag{6}$$

La (6) è proprio la condizione che definisce, in maniera diretta, le coppie f e g che formano una connessione di Galois antitona. Si osservi che in una connessione di Galois antitona la distinzione tra aggiunto sinistro e aggiunto destro sparisce, perché in (6) sia f che g si trovano a destra della disuguaglianza.

Il nome *connessione di Galois* deriva dal fatto che la prima volta che un tale tipo di connessioni furono osservate esplicitamente fu proprio nello studio di Evariste Galois della risoluzione per radicali delle equazioni.

Esempio 2.33. Sia $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ e sia A il suo campo di spezzamento. Definiamo $Aut_{\mathbb{Q}}(A)$ come l'insieme degli automorfismi di A che lascia fisso $\mathbb{Q}$. La composizione di funzioni induce una struttura di gruppo su $Aut_{\mathbb{Q}}(A)$. Ogni estensione algebrica B di A induce un sottogruppo $Gal_B \leq Aut_{\mathbb{Q}}(A)$ e viceversa ogni sottogruppo $G \leq Aut_{\mathbb{Q}}(A)$ induce un'estensione algebrica di Ext_G. Si ha che $G \leq Gal_B$ se e soltanto se $B \leq Ext_G$.

Vediamo altri due esempi di connessioni di Galois antitone, uno dalla Geometria Algebrica e l'altro dalla Logica Matematica.

Esempio 2.34. Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $k[x_1 \dots x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili a coefficienti in k. Dato $S \subseteq k^n$, definiamo

$$\mathbb{I}(S) = \{p \in k[x_1 \dots x_n] \mid p(s) = 0 \ \forall s \in S\}$$

l'ideale dei polinomi che si annullano nei punti di S e, preso $Q \subseteq k[x_1 \dots x_n]$, sia

$$\mathbb{V}(Q) = \{s \in k^n \mid p(s) = 0 \ \forall p \in Q\}.$$

Si ha, allora, che $\mathbb{I}$ e $\mathbb{V}$ formano una connessione di Galois antitona, ovvero che $Q \subseteq \mathbb{I}(S) \leftrightarrow S \subseteq \mathbb{V}(Q)$. Gli operatori di chiusura e di interno associati sono, rispettivamente, $\mathbb{V} \circ \mathbb{I}(S)$ e $\mathbb{I} \circ \mathbb{V}(Q)$.

Esempio 2.35. Sia $\mathcal{K}$ una classe di strutture del primo ordine in un linguaggio $\mathcal{L}$ e consideriamo

$$Th(\mathcal{K}) = \{\varphi \mid \mathcal{M} \models \varphi \ \forall \mathcal{M} \in \mathcal{K}\}$$

l'insieme delle formule soddisfatte da tutte le strutture della classe. Viceversa, sia $S \subseteq Form\forall_{\mathcal{L}}$ un insieme di formule nel linguaggio $\mathcal{L}$ e consideriamo

$$Mod(S) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \varphi \ \forall \varphi \in S\}$$

l'insieme di tutte le strutture che sono modelli di tutte le formule di S. Si può provare che $\mathcal{K} \subseteq Mod(S)$ se e soltanto se $S \subseteq Th(\mathcal{K})$, ossia che $Mod(S)$ e $Th(\mathcal{K})$ formano una connessione di Galois antitona.

Osservando attentamente le definizioni in Esempi 2.34 e 2.35, ci si può rendere conto che quelle di $\mathbb{I}$ e $\mathbb{V}$ sono sintatticamente molto simili a quelle di Th e Mod. In effetti, questi esempi ricadono all'interno di una costruzione più generale, che descriviamo qui concludendo la sezione. Siano A e B due insiemi e $R \subseteq A \times B$ una relazione. Definiamo per $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$

$$X^{\rhd} := \{b \in B \mid (x,b) \in R \ \forall x \in X\}$$

$$Y^{\lhd} := \{a \in A \mid (a,y) \in R \ \forall y \in Y\}.$$

Gli operatori $^{\rhd}$ e $^{\lhd}$ formano una connessione di Galois antitona e in effetti tutte le connessioni di Galois antitone sono indotte in questa maniera.

Ne deriva che le composizioni $^{\rhd\lhd}$ e $^{\lhd\rhd}$ sono due operatori di chiusura.

3

SECONDO E TERZO TEOREMA DI ISOMORFISMO

3.1 IL SECONDO TEOREMA DI ISOMORFISMO

Lemma 3.1. *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due algebre dello stesso tipo e $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo. Se U è un sottouniverso di $\mathscr{A}$ allora $\overrightarrow{f}(U)$ è un sottouniverso di $\mathscr{B}$. Inoltre se V è un sottouniverso di $\mathscr{B}$, allora $\overleftarrow{f}(V)$ è un sottouniverso di $\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che se U è un sottouniverso di $\mathscr{A}$ allora $\overrightarrow{f}(U)$ è un sottouniverso di $\mathscr{B}$. Siano $y_1, \ldots, y_n \in \overrightarrow{f}(U)$ arbitrari e sia g un qualsiasi simbolo di operazione n-aria nel linguaggio di $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$. Poiché $y_1, \ldots, y_n \in \overrightarrow{f}(U)$ devono esistere $x_1, \ldots, x_n \in U$ tali che $f(x_i) = y_i$ per ogni $i \leq n$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} g^{\mathscr{B}}(y_1, \ldots, y_n) &= g^{\mathscr{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \\ &= f(g^{\mathscr{A}}(x_1, \ldots, x_n)) && \text{perché } f \text{ è un omomorfismo} \\ &= f(g^{\mathscr{A}}(x_1, \ldots, x_n)) \in \overrightarrow{f}(U) && \text{perché } g^{\mathscr{A}}(x_1, \ldots, x_n) \in U \end{aligned}$$

La prova della seconda parte dell'enunciato è lasciata per esercizio al lettore. □

Teorema 3.2

Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due algebre e $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo. Per ogni $X \subseteq A$ si ha

$$\overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)) = \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X)).$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\overrightarrow{f}$ preserva l'ordine, cioè se $X \subseteq Y$ allora $\overrightarrow{f}(X) \subseteq \overrightarrow{f}(Y)$. Dimostriamo le due inclusioni.

$\boxed{\supseteq}$ Abbiamo la seguente catena di implicazioni

$$\begin{aligned} X &\subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) && \text{implica} \\ \overrightarrow{f}(X) &\subseteq \overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)) && \text{implica} \\ \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X)) &\subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)) = \overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X))$ è un sottouniverso di $\mathscr{B}$ per il Lemma 3.1.

$\boxed{\subseteq}$ Per il punto 8 dell'Osservazione 2.28 si ha

$$X \subseteq \overleftarrow{f}\,\overrightarrow{f}(X) \subseteq \overleftarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X))). \tag{7}$$

Per il Lemma 3.1 $\overleftarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X)))$ è un sottouniverso di $\mathscr{A}$, che contiene X per la (7), dunque

$$\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X) \subseteq \overleftarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X))).$$

Ne segue che

$$\overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)) \subseteq \overrightarrow{f}\,\overleftarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X))) \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X)).$$

Quindi $\overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X)) \subseteq \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X))$. □

Corollario 3.3. *Sia $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo.*

- $\overrightarrow{f}\colon \mathrm{Sub}\,\mathscr{A} \to \mathrm{Sub}\,\mathscr{B}$ *preserva i join e*
- $\overleftarrow{f}\colon \mathrm{Sub}\,\mathscr{B} \to \mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$ *preserva i meet.*

Dimostrazione. Verifichiamo la prima affermazione:

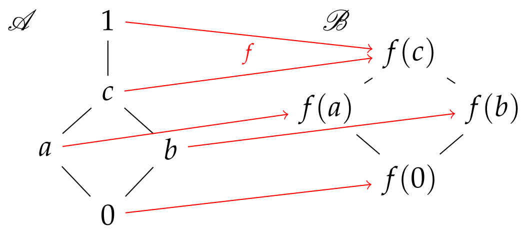
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(X \vee Y) &= \overrightarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(X \cup Y)) && \text{per la definizione di } \vee \\
&= \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X \cup Y)) && \text{per il Teorema 3.2} \\
&= \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{f}(X) \cup \overrightarrow{f}(Y)) && \text{per l'Osservazione 2.28} \\
&= \overrightarrow{f}(X) \vee \overrightarrow{f}(Y) && \text{per la definizione di } \vee
\end{aligned}$$

Analogamente, per la seconda:

$$\overleftarrow{f}(Z \wedge W) = \overleftarrow{f}(Z \cap W) = \overleftarrow{f}(Z) \cap \overleftarrow{f}(W) = \overleftarrow{f}(Z) \wedge \overleftarrow{f}(W).$$ □

In base all'Esempio 2.29, $\overrightarrow{f}$ non può preservare le intersezioni e quindi neanche i meet. Il prossimo esempio mostra che $\overleftarrow{f}$ in generale non preserva i join.

Esempio 3.4. Consideriamo i due reticoli $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ e la funzione f tra di essi definiti come in figura.



Siano

$X := \{f(0), f(a)\} \subseteq \mathcal{B}$ e
$Y := \{f(0), f(b)\} \subseteq \mathcal{B}$.

Calcoliamo, $X \vee Y = \mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(\{f(0), f(a), f(b)\}) = M$, quindi $\overleftarrow{f}(X \vee Y) = \mathscr{L}$ mentre $\overleftarrow{f}(X) \vee \overleftarrow{f}(Y) = \{0, a\} \vee \{0, b\} = \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(\{0, a, b\}) = \{0, a, b, c\}$. Dunque $\overleftarrow{f}(X \vee Y) \neq \overleftarrow{f}(X) \vee \overleftarrow{f}(Y)$. $\square$

L'esempio qui sopra mostra anche che in generale $\overleftarrow{f}(\mathrm{Sg}^{\mathscr{B}}(Z)) = \mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(\overleftarrow{f}(Z))$, basta prendere $Z = \{f(0), f(a), f(b)\}$.

La seguente tabella riassume le proprietà trovate finora.

	unioni	intersezioni	meet in Sub	join in Sub
$\overrightarrow{f}$	Sì	No	No	Sì
$\overleftarrow{f}$	Sì	Sì	Sì	No

Tabella 1: Compatibilità delle funzioni immagine diretta e immagine inversa.

Estendiamo la notazione utilizzata per indicare l'immagine diretta e inversa alle relazioni binarie. Siano $\theta \subseteq A^2$ e $\psi \subseteq B^2$, definiamo:

$$\overrightarrow{f}(\theta) := \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in \theta\}$$

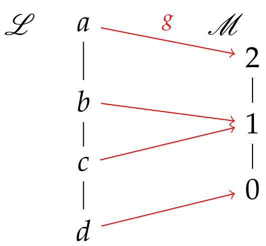
$$\overleftarrow{f}(\psi) := \{(x, y) \mid (f(x), f(y)) \in \psi\}$$

Lemma 3.5. *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due algebre, $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un omomorfismo e $\psi \in \mathrm{Con}\,\mathscr{B}$, allora $\overleftarrow{f}(\psi) \in \mathrm{Con}\,\mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\overleftarrow{f}(\psi)$ è una relazione d'equivalenza. Poiché $\psi \in \mathrm{Con}\,\mathscr{B}$ si ha che per ogni $a \in A$, $(f(a), f(a)) \in \psi$ quindi $0_{\mathscr{A}} \subseteq \overleftarrow{f}(\psi)$. Per la simmetria osserviamo che $(a_1, a_2) \in \overleftarrow{f}(\psi)$ implica che $(f(a_1), f(a_2)) \in \psi$ quindi $(f(a_2), f(a_1)) \in \psi$ e duqnue $(a_2, a_1) \in \overleftarrow{f}(\psi)$. La transitività è analoga. Per la proprietà di sostituzione consideriamo un simbolo di operazione n-aria g e supponiamo $(\overline{a}, \overline{b}) \in \overleftarrow{f}(\psi)$ (cioè $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \overleftarrow{f}(\psi)$); allora si ha $(f(\overline{a}), f(\overline{b})) \in \psi$ e quindi $(g(f(\overline{a})), g(f(\overline{b}))) = (f(g(a_1, \ldots, a_n)), f(g(b_1, \ldots, b_n))) \in \psi$ da cui $(g(\overline{a}), g(\overline{b})) \in \overleftarrow{f}(\psi)$. $\square$

Il prossimo esempio mostra che in generale l'immagine diretta non preserva le congruenze.

Esempio 3.6. Consideriamo i due reticoli $\mathscr{L}$ e $\mathscr{M}$ e la funzione g tra di essi definiti come in figura.



Definiamo la congruenza θ come segue: $\theta := Cg^{\mathscr{L}}\{(a,b),(c,d)\} = 0_{\mathscr{L}} \cup \{(a,b),(c,d),(b,a),(d,c)\}$. Allora $\overrightarrow{g}(\theta) = 0_{\mathscr{M}} \cup \{(2,1),(1,0),(1,2),(0,1)\}$. Ma questa non è transitiva, infatti $(2,1),(1,0) \in \overrightarrow{g}(\theta)$ mentre $(2,0) \notin \overrightarrow{g}(\theta)$.

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\theta, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Definiamo la relazione binaria su A/θ:

$$\psi/\theta := \{(x/\theta, y/\theta) \mid (x,y) \in \psi\}. \tag{8}$$

Osserviamo che in base alla definizione (8), $(x/\theta, y/\theta) \in \psi/\theta$ se e soltanto se esistono $u, v \in A$ tali che $(x,u) \in \theta$, $(y,v) \in \theta$ e $(u,v) \in \psi$.

Lemma 3.7. *Siano $\mathscr{A}$ è un'algebra e $\theta, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Se $\theta \subseteq \psi$ allora ψ/θ è una congruenza su $\mathscr{A}/\theta$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata una volta verificata la seguente osservazione: se $\theta \subseteq \psi$ allora

$$(x/\theta, y/\theta) \in \psi/\theta \text{ se e soltanto se } (x,y) \in \psi.$$

Infatti, l'implicazione da destra verso sinistra è ovvia, mentre per quella da sinistra verso destra basta osservare che $(x/\theta, y/\theta) \in \psi/\theta$ implica che esistono $u, v \in A$ tali che $(x,u) \in \theta$, $(y,v) \in \theta$ e $(u,v) \in \psi$; siccome $\theta \subseteq \psi$ si ha $(x,u) \in \psi$, $(y,v) \in \psi$ e $(u,v) \in \psi$, che danno $(x,y) \in \psi$. A questo punto la dimostrazione del lemma si riduce a una semplice verifica delle proprietà delle congruenze. □

Teorema 3.8 (secondo teorema di isomorfismo)

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\theta, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$ con $\theta \subseteq \psi$. Si ha

$$\frac{A/\theta}{\psi/\theta} \cong A/\psi.$$

Dimostrazione. Definiamo una funzione f da A/θ in A/ψ come segue: $f(x/\theta) := x/\psi$. La funzione è ben definita perché se $(x,y) \in \theta \subseteq \psi$ allora $x/\psi = y/\psi$. Se g è un simbolo di operazione n-ario nel linguaggio di $\mathscr{A}$ e $x_1, \dots, x_n \in A$, allora

$$\begin{aligned} f\left(g^{\mathscr{A}/\theta}\left(\frac{x_1}{\theta}, \dots, \frac{x_n}{\theta}\right)\right) &= f\left(\left(\frac{g^{\mathscr{A}}(x_1, \dots, x_n)}{\theta}\right)\right) && \text{per la definizione di } g^{\mathscr{A}/\theta} \\ &= f\left(\left(\frac{g^{\mathscr{A}}(x_1, \dots, x_n)}{\psi}\right)\right) && \text{per la definizione di } f \\ &= f\left(g^{\mathscr{A}/\psi}\left(\frac{x_1}{\psi}, \dots, \frac{x_n}{\psi}\right)\right) && \text{per la definizione di } g^{\mathscr{A}/\psi} \end{aligned}$$

Si vede inoltre facilmente che f è suriettiva. Calcoliamo infine $\ker f$. Si ha che $(x/\theta, y/\theta) \in \ker f$ se e soltanto se $(x,y) \in \psi$ se e soltanto se $(x/\theta, y/\theta) \in \psi/\theta$. Dunque il primo teorema di isomorfismo (Teorema 1.32) dà l'isomorfismo cercato. $\square$

Notazione 3.9. Se $\mathscr{L}$ è un reticolo e $a, b \in \mathscr{L}$ con $a \leq b$, definiamo $\mathbf{I}(a,b) := \{x \in \mathscr{L} \mid a \leq x \leq b\}$. Si noti che $\mathbf{I}(a,b)$ è un sottoreticolo di $\mathscr{L}$.

Teorema 3.10 (di corrispondenza)

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Consideriamo la proiezione canonica $q_\theta \colon \mathscr{A} \twoheadrightarrow \mathscr{A}/\theta$. Allora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q_\theta} \colon \mathbf{I}(\theta, 1_{\mathscr{A}}) \subseteq \mathtt{Con}\,\mathscr{A} &\to \mathtt{Con}(A/\theta) \\ \psi &\mapsto \psi/\theta \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Osserviamo che per il Lemma 3.7, per ogni $\psi \in \mathbf{I}(\theta, 1_{\mathscr{A}})$ la relazione $\overrightarrow{q_\theta}(\psi) = \psi/\theta$ è effettivamente una congruenza di (A/θ). Poiché $\overrightarrow{q_\theta}$ e $\overleftarrow{q_\theta}$ formano una connessione di Galois monotona, per il Corollario 3.3 preservano entrambe l'ordine. Quindi, per mostrare che $\overrightarrow{q_\theta}$ è un isomorfismo, in base al Lemma 2.12, basta far vedere che $\overrightarrow{q_\theta}$ e $\overleftarrow{q_\theta}$ sono l'una l'inversa dell'altra. Per il punto 7 del Osservazione 2.28 sappiamo che $\overrightarrow{q_\theta} \circ \overleftarrow{q_\theta} = \mathtt{id}$ perché q_θ è suriettiva. Infine, calcolando di ottiene $\overleftarrow{q_\theta} \circ \overrightarrow{q_\theta}(\psi) = \overleftarrow{q_\theta}(\{(x/\theta, y/\theta) \mid (x,y) \in \psi\}) = \psi$. $\square$

3.2 IL TERZO TEOREMA DI ISOMORFISMO

Prima di enunciare il terzo teorema di isomorfismo, richiamiamo il terzo teorema di isomorfismo per i gruppi, in modo da evidenziarne gli aspetti fondamentali:

Teorema 3.11 (Terzo teorema di isomorfismo dei gruppi)

Sia $\mathscr{G}$ un gruppo, $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Allora

1. $HN \leq G$;
2. $N \trianglelefteq HN$;
3. $HN/N \cong H/H \cap N$.

Questo rappresenta un caso particolare del terzo teorema di omomorfismo in algebra universale. Osserviamo, infatti, che il sottogruppo H può essere pensato come una sottoalgebra di $\mathscr{G}$, il sottogruppo normale N è univocamente associato a una congruenza su $\mathscr{G}$ e $H \cap N$ rappresenta la restrizione della congruenza ad H. Inoltre si noti che $HN = \{h \cdot n \mid h \in H,\ n \in N\} = \bigcup_{h \in H} hN$, e hN può essere descritto come la classe di equivalenza di h rispetto alla congruenza associata ad N.

Definizione 3.12

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra, $B \subseteq A$ e $\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Definiamo

$$B^\theta := \bigcup_{b \in B} b/\theta \quad \text{e} \quad \theta_{\restriction B} := \theta \cap B^2$$

Se $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$ (ovvero $\mathscr{B}$ è una sottoalgebra di $\mathscr{A}$), allora B^θ è un sottouniverso di $\mathscr{A}$ e $\theta_{\restriction B}$ è una congruenza.

Teorema 3.13 (Terzo teorema di isomorfismo)

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra, $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$ e $\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Allora:

1. $\mathscr{B}^\theta \leq \mathscr{A}$;
2. $\theta_{\restriction B^\theta} \in \mathtt{Con}\,\mathscr{B}^\theta$;
3. $B^\theta/\theta_{\restriction B^\theta} \cong B/\theta_{\restriction B}$.

Dimostrazione. Le prime due asserzioni sono di facile verifica e sono quindi lasciate al lettore. Per quanto riguarda la terza, osserviamo preliminarmente che c'è una banale immersione $B \hookrightarrow B^\theta$ e un quoziente $B^\theta \twoheadrightarrow B^\theta/\theta_{\restriction B^\theta}$. Definiamo la composizione

$f\colon B \hookrightarrow B^\theta \twoheadrightarrow B^\theta/\theta_{\restriction B^\theta}$. Mostriamo che f è suriettiva. Prendiamo un elemento arbitrario di $B^\theta/\theta_{\restriction B^\theta}$, $a/\theta_{\restriction B^\theta}$ dove $a \in B^\theta$. Quindi deve esistere $b \in B$ tale che $a\ \theta\ b$. Ma allora $a/\theta_{\restriction B^\theta} = b/\theta_{\restriction B^\theta} = f(b)$. Notiamo inoltre che $\ker f = \theta_{\restriction B^\theta}$. Quindi applicando il primo teorema di isomorfismo (Teorema 1.32) otteniamo che $B^\theta/\theta_{\restriction B^\theta} \cong B/\theta_{\restriction B}$. $\square$

4

DECOMPOSIZIONE DI ALGEBRE

4.1 DECOMPOSIZIONI DIRETTE

Definizione 4.1

Date tre algebre $\mathscr{A}, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$, diremo che $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ danno origine a una **decomposizione in prodotto** di $\mathscr{A}$ se

$$\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$$

Notazione 4.2. Siano $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ due algebre. Allora chiameremo **proiezioni** e indicheremo con p_i per $i = 1, 2$ le applicazioni suriettive:

$$p_i \colon \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \twoheadrightarrow \mathscr{A}_i \quad p_i(a_1, a_2) = a_i \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Indichiamo con

$$\eta_i := \ker p_i = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (A_1 \times A_2)^2 \mid a_i = b_i\} \subseteq (\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2)^2 \quad \text{per } i = 1, 2.$$

Notiamo che

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in (A_1 \times A_2) \mid a_1 = b_1\ a_2 = b_2\} = 0_{\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2}$$

e inoltre

$$\eta_1 \,;\, \eta_2 = 1_{\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2}.$$

Infatti se $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ allora $((a_1, a_2), (a_1, b_2)) \in \eta_1$ e $((a_1, b_2), (b_1, b_2)) \in \eta_2$ e ciò implica che $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \eta_1 \,;\, \eta_2$.

Definizione 4.3

Due congruenze θ, ψ di un'algebra $\mathscr{A}$ si dicono **complementari** se $\theta \wedge \psi = 0_{\mathscr{A}}$ e $\theta \,;\, \psi = 1_{\mathscr{A}}$.

Teorema 4.4

Data un'algebra $\mathscr{A}$ e $\theta, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$ complementari si ha:

$$\mathscr{A} \cong \mathscr{A}/\theta \times \mathscr{A}/\psi \quad \text{tramite l'applicazione} \quad a \overset{h}{\longmapsto} (a/\theta, a/\psi).$$

Inoltre ogni decomposizione in prodotto diretto di $\mathscr{A}$ ha questa forma.

Dimostrazione. Abbiamo già verificato che se $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ allora le due congruenze $\eta_i = \ker p_i$, con $i = 1, 2$, sono complementari. Viceversa, verifichiamo che la funzione h, descritta nell'enunciato, è un isomorfismo:

OMOMORFISMO: Consideriamo un simbolo di operazione n-aria g e $\bar{a} \in A^n$. Allora $h(g(\bar{a})) = (g(\bar{a})/\theta, g(\bar{a}/\psi) = (g(\bar{a}/\theta), g(\bar{a}/\psi)) = g(h(\bar{a}))$.

INIETTIVITÀ: Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $(a_1/\theta, a_1/\psi) = (a_2/\theta, a_2/\psi)$, cioè $a_1/\theta = a_2/\theta$ e $a_1/\psi = a_2/\psi$. Allora $(a_1, a_2) \in \theta$ e $(a_1, a_2) \in \psi$ quindi $(a_1, a_2) \in \theta \cap \psi = 0_{\mathscr{A}}$. Ma allora $a_1 = a_2$.

SURIETTIVITÀ: Consideriamo $(a/\theta, b/\psi) \in \mathscr{A}/\theta \times \mathscr{A}/\psi$. Notiamo che $(a, b) \in 1_{\mathscr{A}} = \theta \,;\psi$, quindi deve esistere $c \in A$ tale che $(a, c) \in \theta$ e $(c, b) \in \psi$. Dunque $(a/\theta, b/\psi) = (c/\theta, c/\psi) = h(c)$. □

Definizione 4.5

Un'algebra $\mathscr{A}$ è detta **direttamente indecomponibile** se non è isomorfa al prodotto diretto di algebre non banali.

Purtroppo in generale non è possibile dimostrare che "ogni algebra si decompone nel prodotto diretto di algebre direttamente indecomponibili", come si evince dal prossimo esempio.

Esempio 4.6. Sia $\mathbb{F}_2$ il campo costituito da due elementi. Consideriamo gli $\mathbb{F}_2$-spazi vettoriali. Se una base di uno spazio vettoriali si può dividere in due insiemi disgiunti, si ha una decomposizione diretta dello spazio vettoriale. Quindi l'unico $\mathbb{F}_2$-spazio vettoriale direttamente indecomponibile è quello di dimensione 1. Sia V un $\mathbb{F}_2$-spazio vettoriale di dimensione infinita numerabile, allora:

1. V non è direttamente indecomponibile;

2. V non è il prodotto di un numero finito di spazi 1-dimensionali, perché il prodotto avrebbe dimensione finita, diversamente da V;

3. V non è il prodotto di un numero infinito di spazi 1-dimensionali perché $|V| = \aleph_0$ quindi se I è infinito $|\mathbb{F}_2^I| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

4.2 DECOMPOSIZIONI SOTTODIRETTE

Il tentativo di rappresentare ogni algebra come prodotto diretto di algebre direttamente decomponibili fallisce perché si richiede che l'algebra sia *isomorfa* a un prodotto. Possiamo indebolire questa richiesta richiedendo solamente che l'algebra si *immerga* in un prodotto. Per far si che i fattori del prodotto siano quozienti dell'algebra di partenza è sufficiente richiedere che le composizioni dell'immersione con le proiezioni siano ancora sureittive.

Sia $\mathscr{B} = \Pi_{i \in I} \mathscr{A}_i$, per ogni $i \in I$ indichiamo con $p_i \colon f \mapsto f(i)$ le proiezioni canoniche e con $\eta_i := \ker p_i$ i loro nuclei. Osserviamo che $\bigcap_{i \in I} \eta_i = 0_{\mathscr{B}}$, ovvero per ogni $f, g \in \prod_{i \in I} \mathscr{A}_i$ se $f \neq g$ allora esiste $i \in I$ tale che $f(i) \neq g(i)$.

Definizione 4.7

Siano $\mathscr{B}$ e $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ algebre dello stesso tipo e siano $h_i \colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}_i$ omomorfismi. Diremo che la famiglia $\{h_i \mid i \in I\}$ **separa i punti** se per ogni coppia di elementi distinti $x, y \in B$ esiste $i \in I$ tale che $h_i(x) \neq h_i(y)$.

Definizione 4.8

Sia $\{h_i \colon B \to A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di funzioni. Definiamo la **mappa prodotto**

$$\Pi_{i \in I} h_i \colon B \to \prod_{i \in I} A_i$$

ponendo, per ogni $b \in B$:

$$\Pi_{i \in I} h_i(b) := (h_i(b) \mid i \in I) \qquad \text{(o equivalentemente } \Pi_{i \in I} h_i(b)(i) := h_i(b)\text{).}$$

Proposizione 4.9. *Sia $\{h_i \mid h_i \colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}_i, i \in I\}$ una famiglia di omomorfismi. Ponendo $h := \Pi_{i \in I} h_i$ si ha $\ker h = \bigcap_{i \in I} \ker h_i$ e inoltre le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) la famiglia $\{h_i \mid i \in I\}$ separa i punti;

(ii) h è iniettiva;

(iii) $\ker h = \bigcap_{i\in I} h_i = 0_{\mathscr{B}}$.

Dimostrazione. Mostriamo prima di tutto che $\ker h = \bigcap_{i\in I} \ker h_i$. Ciò vale in quanto $(b_1, b_2) \in \ker h$ se e soltanto se $h_i(b_1) = h_i(b_2)$ per ogni $i \in I$, se e soltanto se $(b_1, b_2) \in \bigcap_{i\in I} \ker h_i$. Proviamo ora le equivalenze.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Siano $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$. Allora $\{h_i \mid i \in I\}$ separa i punti, in altre parole, esiste $i \in I$ tale che $h_i(b_i) \neq h_i(b_2)$, quindi $h(b_1) \neq h(b_2)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Deriva dall' Esercizio 1.38, poiché il nucleo di una funzione invettiva è la relazione identica.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supponiamo $\ker h = 0_{\mathscr{B}} = \bigcap_{i\in I} \ker h_i$. Consideriamo $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$ allora $(b_1, b_2) \notin \bigcap_{i\in I} \ker h_i$ e ciò implica che esiste $i \in I$ tale che $(b_1, b_2) \notin \ker h_i$, dunque $h_i(b_1) \neq h_i(b_2)$. □

Definizione 4.10

Un'algebra $\mathscr{B}$ è detta **prodotto sottodiretto** delle algebre $\{A_i \mid i \in I\}$ se

1. $\mathscr{B}$ è una sottoalgebra di $\prod_{i\in I} \mathscr{A}_i$ e
2. per ogni $i \in I$, l'applicazione $p_{i\restriction\mathscr{B}} \colon \mathscr{B} \leq \prod_{i\in I} \mathscr{A}_i \to \mathscr{A}_i$ è suriettiva.

Un monomorfismo $g \colon \mathscr{B} \rightarrowtail \prod_{i\in I} \mathscr{A}_i$ è detto **sottodiretto** se $\overrightarrow{g}(B)$ è un prodotto sottodiretto delle $\mathscr{A}_i$. In questo caso diciamo che g è una **rappresentazione sottodiretta** di $\mathscr{B}$. Indicheremo con $\underset{s}{\rightarrowtail}$ un monomorfismo sottodiretto.

Proposizione 4.11. *Sia $\mathscr{A}$ un'algebra e $\{\theta_i \mid i \in I\}$ una famiglia di congruenze su $\mathscr{A}$. Se $\bigcap_{i\in I} \theta_i = 0_{\mathscr{A}}$, allora la mappa $\Pi_{i\in I} q_{\theta_i} \colon \mathscr{A} \to \prod_{i\in I} \mathscr{A}/\theta_i$ è un'immersione sottodiretta. Viceversa se $g \colon \mathscr{A} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ è una rappresentazione sottodiretta allora ponendo $\theta_i :=$ $\ker(p_i \circ g)$ si ha $\bigcap_{i\in I} \theta_i = 0_{\mathscr{A}}$ e $\mathscr{B}_i \cong \mathscr{A}/\theta_i$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $q_i \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}/\theta_i$ le mappe canoniche q_{θ_i} e definiamo $q := \prod_{i\in I} q_i$.Utilizzando la Proposizione 4.9 otteniamo che da $\ker q = \bigcap_{i\in I} \ker q_i = \bigcap_{i\in I} \theta_i = 0_{\mathscr{A}}$ segue che q è un monomorfismo. Inoltre osserviamo che le proiezioni $p_i \colon \prod_{j\in I} A_j \to A_i$ hanno la proprietà che $p_i \circ q = q_i$, infatti se $a \in A$ allora $p_i \circ q(a) = p_i((q_i(a) \mid i \in I)) = q_i(a)$. Tuttavia le q_i sono suriettive quindi lo sono anche le composizioni $p_i \circ q$ per ogni $i \in I$.

Viceversa, se $g \colon \mathscr{A} \to \prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ è una rappresentazone sottodiretta, allora $p_i \circ g \colon A \to B_i$ è suriettiva per ogni $i \in I$. Quindi, per il primo teorema di isomorfismo (Teorema 1.32), $\mathscr{B}_i \cong \mathscr{A} / \ker(p_i \circ g)$. Poniamo $\theta_i := \ker(p_i \circ g)$. Notiamo ora che

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} \theta_i &= \bigcap_{i\in I} \ker(p_i \circ g) \\
&= \bigcap_{i\in I} \{(a_1, a_2) \mid p_i \circ g(a_1) = p_i \circ g(a_2)\} \\
&= \bigcap_{i\in I} \{(a_1, a_2) \mid g(a_1)(i) = g(a_2)(i)\} \\
&= \{(a_1, a_2) \mid g(a_1) = g(a_2)\} \\
&= \ker g.
\end{aligned}$$

Siccome g è un monomorfismo, $\ker g = 0_{\mathscr{A}}$. □

Esempio 4.12. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi e $\mathbb{Z}$ il gruppo additivo degli interi. Per ogni $p \in \mathbb{P}$ sia θ_p la congruenza modulo p su $\mathbb{Z}$. Allora si ha che $\bigcap_{p\in\mathbb{P}} \theta_p = 0_{\mathbb{Z}}$, quindi per la proposizione precedente

$$\mathbb{Z} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}/\theta_p \cong \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Definizione 4.13

Diremo che un'algebra $\mathscr{A}$ è **sottodirettamente indecomponibile** (o **irriducibile**) se per ogni sua rappresentazione sottodiretta $h\colon \mathscr{A} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{i\in I} \mathscr{A}_i$ esiste $i \in I$ tale che $p_i \circ h\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}_i$ è un isomorfismo.

Esempio 4.14. L'unico reticolo distributivo sottodirettamente indecomponibile è il reticolo $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$.

Esempio 4.15. Un gruppo abeliano finito è sottodirettamente indecomponibile se è isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^n}$ per qualche primo p.

4.3 IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE SOTTODIRETTA DI BIRKHOFF

Definizione 4.16

Siano $\mathscr{L}$ un reticolo e $a \in \mathscr{L}$. Diremo che a è **$\wedge$-irriducibile** se per ogni $b, c \in \mathscr{L}$ tali che $a = b \wedge c$ si ha che $a = b$ oppure $a = c$.

Inoltre, diremo che a è **completamente $\wedge$-irriducibile** se per ogni $X \subseteq \mathscr{L}$ tale che $a = \bigwedge X$ si ha che $a \in X$.

Lemma 4.17. *Sia $\mathscr{L}$ un reticolo completo. Le seguenti sono equivalenti:*

(i) $a \in \mathscr{L}$ *è completamente* $\wedge$*-irriducibile;*

(ii) $\exists c \in \mathscr{L}$ *tale che* $a < c$ *e per ogni* $x \in \mathscr{L}$ *se* $a \leq x$ *allora* $c \leq x$.

Dimostrazione. Proviamo le due implicazioni.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sia a completamente $\wedge$-irriducibile. Consideriamo $X := \{x \in \mathscr{L} \mid a < x\}$ e definiamo $c = \bigwedge X$. Sicuramente $a \leq c$, ma $a \neq c$ perché è completamente $\wedge$-irriducibile. Inoltre se $x \geq a$ allora $x \in X$ quindi $c \leq x$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia c un elemento che soddisfa la (ii) . Supponiamo per assurdo che a non sia completamente $\wedge$-irriducibile. Allora $\exists X \subseteq \mathscr{L}$ tale che $a = \bigwedge X$ e $a \notin X$. Poiché per ogni $x \in X$ allora la (ii) implica che anche $c \leq x$. Quindi si ottiene $a < c \leq \bigwedge X = a$ che è assurdo.

$\square$

Teorema 4.18

Un'algebra $\mathscr{A}$ è sottodirettamente irriducibile se e solo se $0_{\mathscr{A}}$ è completamente $\wedge$-irriducibile in $\mathtt{Con}(\mathscr{A})$. Più in generale, se θ è una congruenza di un'algebra $\mathscr{A}$, allora $\mathscr{A}/\theta$ è sottodirettamente irriducibile se e solo se θ è completamente $\wedge$-irriducibile in $\mathtt{Con}\,\mathscr{A}$.

Dimostrazione. Consideriamo un'algebra sottodirettamente irriducibile $\mathscr{A}$ e mostriamo che $0_{\mathscr{A}}$ è completamente $\wedge$-irriducibile. Supponiamo che $0_{\mathscr{A}} = \bigwedge_{i \in I} \theta_i$ per $\theta_i \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$. Per la Proposizione 4.11 $\mathscr{A} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{i \in I} \mathscr{A}/\theta_i$, chiamiamo g la rappresentazione sottodiretta. L'algebra $\mathscr{A}$ è sottodirettamente irriducibile, quindi deve esistere $i \in I$ tale che $p_i \circ g \colon A \to A/\theta_i$ è un isomorfismo. Allora $p_i \circ g$ è iniettivo, quinidi $\ker(p_i \circ g) = 0_{\mathscr{A}}$, ma $\ker(p_i \circ g) = \theta_i$ e dunque $\theta_i = 0_{\mathscr{A}}$.
Viceversa, supponiamo che $0_{\mathscr{A}}$ sia completamente $\wedge$-irriducibile e che $g \colon \mathscr{A} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{i \in I} \mathscr{B}_i$ sia una rappresentazione sottodiretta. Sempre per la Proposizione 4.11 esistono $\theta_i \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$ tali che $\bigwedge_{i \in I} \theta_i = 0_{\mathscr{A}}$ e $\mathscr{B}_i \cong \mathscr{A}/\theta_i$. Poiché $0_{\mathscr{A}}$ è completamente $\wedge$-irriducibile esiste $i \in I$ tale che $\theta_i = 0_{\mathscr{A}}$, ma allora $\mathscr{A}/\theta_i = \mathscr{A}/0_{\mathscr{A}} \cong \mathscr{A}$.
Infine consideriamo $\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$ e mostriamo che $\mathscr{A}/\theta$ è sottodirettamente irriducibile se e soltanto se θ è completamente $\wedge$-irriducibile. Basta ricordare che, per il teorema di corrispondenza (Teorema 3.10) $\mathtt{Con}(\mathscr{A}/\theta) \cong I[\theta, 1_{\mathscr{A}}]$ e in tale isomorfismo il minimo $0_{\mathscr{A}/\theta}$ di $\mathtt{Con}(\mathscr{A}/\theta)$ corrisponde al minimo θ di $\mathbf{I}(\theta, 1_{\mathscr{A}})$. Infatti per quanto appena

provato, $\mathscr{A}/\theta$ è sottodirettamente irriducibile se e soltanto se $0_{\mathscr{A}/\theta}$ è completamente $\wedge$-irriducibile in $\mathtt{Con}(\mathscr{A}/\theta)$ e ciò equivalente a dire che θ completamente $\wedge$-irriducibile in $\mathtt{Con}(\mathscr{A})$. □

Teorema 4.19 (Birkhoff)

Ogni algebra non banale è isomorfa a un prodotto sottodiretto di algebre sottodirettamente indecomponibili.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra non banale, consideriamo l'insieme:

$$I := \{\{a, b\} \mid a, b \in A \text{ tali che } a \neq b\}.$$

Per ogni $\{a, b\} \in I$ possiamo trovare, utilizzando il lemma di Zorn, una congruenza $\theta_{a,b}$ che non includa (a, b) e che sia massimale rispetto a questa proprietà (si verifica che l'insieme $\mathcal{Z}_{\{a,b\}} := \{\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A} \mid (a, b) \notin \theta\}$ è induttivo). Osserviamo che la congruenza $\theta_{a,b}$ è completamente $\wedge$-irriducibile. Infatti, se $\theta_{a,b} = \bigwedge_{j\in J} \psi_i$, allora, poiché $(a, b) \notin \theta_{a,b}$ deve esistere $i \in J$ tale che $(a, b) \notin \psi_i$. Ma $\theta_{a,b}$ è massimale rispetto alla proprietà di non contenere (a, b), quindi $\psi_i \subseteq \theta_{a,b}$. Inoltre per ipotesi $\theta_{a,b} \subseteq \psi_j$ per ogni $j \in J$, ne segue che $\psi_i = \theta_{a,b}$. Dunque per il Teorema 4.18 $\mathscr{A}/\theta_{a,b}$ è sottodirettamente irriducibile. Si noti inoltre che $\bigcap_{\{a,b\}\in I} \theta_{a,b} = 0_{\mathscr{A}}$, infatti se $(c, d) \in \bigcap_{\{a,b\}\in I} \theta_{a,b}$ allora $(c, d) \in \theta_{a,b}$ per ogni $a, b \in A$ con $a \neq b$, quindi si ha necessariamente $c = d$. Ne segue, per la Proposizione 4.11, che $\mathscr{A} \underset{s}{\rightarrowtail} \prod_{i\in I} \mathscr{A}/\theta_i$. □

Esercizio 4.20. Rappresentare il reticolo linearmente ordinato costituito da tre elementi come prodotto sottodiretto di reticoli sottodirettamente irriducibili.

4.4 IL TEOREMA HSP

Definizione 4.21

Per una qualsiasi classe di algebre $\mathcal{K}$, scriviamo $\mathbb{P}_s(\mathcal{K})$ per indicare la classe delle algebre isomorfe a prodotti sottodiretti di algebre in $\mathcal{K}$.

Ricordiamo che per **varietà** si intende una classe di algebre chiusa rispetto a $\mathbb{H}, \mathbb{S}, \mathbb{P}$. Data una classe di algebre $\mathcal{K}$, denotiamo con $\mathbf{V}(\mathcal{K})$ la più piccola varietà contenente $\mathcal{K}$.

Notazione 4.22. Se O_1 e O_2 sono operatori su classi di algebre, scriveremo $O_1 \leq O_2$ se per ogni classe di algebre $\mathcal{K}$ $O_1(\mathcal{K}) \subseteq O_2(\mathcal{K})$.

Lemma 4.23. *Valgono le seguenti:*

1. $\mathbb{S}\,\mathbb{H} \leq \mathbb{H}\,\mathbb{S}$,
2. $\mathbb{P}\,\mathbb{S} \leq \mathbb{S}\,\mathbb{P}$,
3. $\mathbb{P}\,\mathbb{H} \leq \mathbb{H}\,\mathbb{P}$,
4. $\mathbb{P}_s \leq \mathbb{S}\,\mathbb{P}$.

Dimostrazione. Fissiamo una classe di algebre arbitraria $\mathcal{K}$ e mostriamo i primi due punti. I punti 1 e 2 sono lasciati per esercizio.

Punto 1 Vogliamo provare che $\mathbb{S}(\mathbb{H}(\mathcal{K})) \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{S}(\mathcal{K}))$. Consideriamo $\mathscr{A} \in \mathbb{S}(\mathbb{H}(\mathcal{K}))$, ciò significa che esiste un'algebra $\mathscr{B} \in \mathcal{K}$ e un omomorfismo h tali che $\mathscr{A} \leq \overrightarrow{h}(\mathscr{B})$. Allora, per il Lemma 3.1, $\overleftarrow{h}(A)$ è un sottouniverso di $\mathscr{B}$ e poiché h è suriettiva, per l'Osservazione 2.28 $\overrightarrow{h}(\overleftarrow{h}(A)) = A$. Dunque $\mathscr{A}$ è un immagine omomorfa della sottalegebra $\overleftarrow{h}(\mathscr{A})$ di $\mathscr{B}$, in simboli $\mathscr{A} \in \mathbb{H}\,\mathbb{S}(\mathcal{K})$.

Punto 2 Supponiamo che $\mathscr{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{S}(\mathcal{K}))$. Questo vuol dire che esistono $\{\mathscr{B}_i \mid i \in I\}$ in $\mathcal{K}$ e per ogni $i \in I$ esiste un'algebra $\mathscr{C}_i \leq \mathscr{B}_i$ tali che $\mathscr{A} \cong \prod_{i\in I} \mathscr{C}_i$. Si vede facilmente che $\prod_{i\in I} \mathscr{C}_i \leq \prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$. Quindi $\mathscr{A}$ è isomorfa a una sottoalgebra di un prodotto diretto di algebre in $\mathcal{K}$, ovvero $\mathscr{A} \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$.

□

Teorema 4.24

$\mathbb{V} = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che per ogni classe di algebre $\mathcal{K}$ si ha

$$\mathbb{V}(\mathcal{K}) = \mathbb{H}(\mathbb{S}(\mathbb{P}(\mathcal{K}))).$$

L'inclusione $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{V}(\mathcal{K})$ è semplice da mostrare, infatti basta osservare che $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathbb{V}(\mathcal{K})) = \mathbb{V}(\mathcal{K})$. Per provare che $\mathbb{V}(\mathcal{K}) \leq \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ è sufficiente mostrare che $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ è una varietà, poiché $\mathbb{V}(\mathcal{K})$ è la più piccola varietà contenente $\mathcal{K}$. Per far vedere ciò mostriamo che $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ è chiusa per immagini omomorfe, sottalgebre e prodotti diretti. Ovviamente $\mathbb{H}(\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}) = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}$ e, utilizzando il lemma precedente (Lemma 4.23), si ha $\mathbb{S}(\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}) \leq \mathbb{H}\,\mathbb{S}^2\,\mathbb{P} = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}(\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}) \leq \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}^2 = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}$. □

Notazione 4.25. Data una classe di algebre $\mathcal{K}$, indicheremo con $\mathcal{K}_{\text{s.i.}}$ la classe delle algebre in $\mathcal{K}$ che sono sottodirettamente irriducibili, in simboli,

$$\mathcal{K}_{\text{s.i.}} = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in \mathcal{K} \text{ e } \mathscr{A} \text{ è sottodirettamente irriducibile}\}.$$

Teorema 4.26

Sia $\mathcal{V}$ una varietà, allora $\mathcal{V}$ è esattamente la classe delle algebre isomorfe a prodotti sottodiretti delle algebre sottodirettamente irriducibili in $\mathcal{V}$, cioè

$$\mathcal{V} = \mathbb{P}_s(\mathcal{V}_{s.i.}).$$

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A} \in \mathcal{V}$. Per il teorema di rappresentazione sottodiretta di Birkhoff (Teorema 4.19), è possibile scrivere $\mathscr{A}$ come prodotto sottodiretto di algebre sottodirettamente irriducibili $\{\mathscr{B}_i \mid i \in I\}$. Ma, per definizione di prodotto diretto, per ogni $i \in I$ l'applicazione $p_{i\restriction A} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$ è un omomorfismo suriettivo, dunque ogni algebra $\mathscr{B}_i$ è immagine omomorfa di $\mathscr{A}$ e quindi appartiene a $\mathcal{V}$. Ne segue che $\mathscr{A} \in \mathbb{P}_s(\mathcal{V}_{\text{s.i.}})$. Per provare l'altra inclusione è sufficiente applicare il Lemma 4.23 per ottenere che $\mathbb{P}_s(\mathcal{V}_{\text{s.i.}}) \subseteq \mathbb{S}(\mathbb{P}(\mathcal{V}_{\text{s.i.}})) \subseteq \mathbb{S}(\mathbb{P}(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$. $\square$

Esempio 4.27. Poiché, a meno di isomorfismo, l'unico reticolo distributivo sottodirettamente irriducibile è $\mathbb{2}_D := (\{0,1\}, \min, \max\}$, ogni reticolo distributivo è prodotto sottodiretto di esso. Quindi, indicando con $\mathcal{DL}$ la classe dei reticoli distributivi, si ha

$$\mathcal{DL} = \mathbb{V}(\mathbb{2}_D) = \mathbb{P}_s(\mathbb{2}_D).$$

Poiché il reticolo $\mathbb{2}_D$ è un sottoreticolo di qualsiasi reticolo distributivo non banale, otteniamo che se $\mathscr{L}$ è un qualsiasi reticolo distributivo non banale si ha

$$\mathcal{DL} = \mathbb{V}(\mathscr{L}) = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathscr{L}).$$

Corollario 4.28. *Una varietà di algebre è univocamente determinata dalle sue algebre sottodirettamente indecomponibili. In generale se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sono due varità di algebre allora*

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W} \iff \mathcal{V}_{s.i} \subseteq \mathcal{W}_{s.i}.$$

5

ALGEBRE LIBERE

5.1 ALGEBRE DI TERMINI

Nelle sezioni precedenti abbiamo detto che un *tipo* è dato da un qualsiasi insieme $\mathcal{F}$, detto insieme dei simboli di operazione, e una qualsiasi funzione $\rho \colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$. Inoltre una coppia $(A, \mathcal{F}^A)$ è un'algebra di tipo $(\mathcal{F}, \rho)$ se per ogni $f \in \mathcal{F}$ con $\rho(f) = n$ c'è una funzione $f^A \colon A^n \to A$ in $\mathcal{F}^A$.

Fissiamo un tipo $\rho \colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ e un insieme X (possibilmente infinito) disgiunto da $\mathcal{F}$. Chiameremo gli elementi di X **le variabili**. Indichiamo con $\mathcal{F}_n := \rho^{-1}(n)$ (tutti i simboli di operazione n-aria). Chiameremo **parola** su $X \cup \mathcal{F}$ una stringa di simboli presi da $X \cup \mathcal{F}$.

Definizione 5.1

Sia $\rho \colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ un tipo e X disgiunto da $\mathcal{F}$. Definiamo per ricorsione su n gli insiemi T_n nel seguente modo:

$$T_0 := X \cup \mathcal{F}_0$$
$$T_{n+1} := T_n \cup \{ f s_1 \dots s_k \mid f \in \mathcal{F}_k,\ s_1, s_2, \dots, s_k \in T_n \}$$

Infine scriviamo $T_\rho(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Chiameremo $T_\rho(X)$ l'insieme dei **termini** nelle variabili in X. Se $w \in T_\rho(X)$ definiamo la **complessità** di w, in simboli $\mid w \mid$, come il più piccolo n tale $w \in T_n$.

Esempio 5.2. Prendiamo per esempio un tipo ρ tale che $\rho(f) = 2$ e $\rho(g) = 3$, allora la stringa $fgxyzfxz$ è un termine. In notazione *suffissa* —molto più comune in matematica— tale termine corrisponde a $f(g(x,y,z), f(x,z))$. Si noti che il vantaggio della precedente notazione, detta *notazione prefissa*, è che è possibile evitare totalmente le parentesi.

Come è consueto fare, indicheremo un termine con il simbolo $t(x_1, \dots, x_n)$ per evidenziare che le variabili che compaiono in t variano tra $x_1, \dots, x_n$ (ma possono formarne un sottoinsieme proprio). I termini possono essere pensati come combinazioni formali di simboli di operazioni in un qualche tipo ρ. Per esempio, se $\rho = \{+, \{a\cdot\}_{a \in A}\}$ è il tipo degli spazi vettoriali su un campo A (il simbolo $a\cdot$ denota l'operazione unaria di prodotto scalare per a), allora i termini in $T_\rho(\{x_1, \dots, x_n\})$ corrispondono alle combinazioni lineari di n vettori. Se $\rho = \{+, \cdot, 0, 1\}$ i termini in $T_\rho(\{x_1, \dots, x_n\})$ sono i polinomi in n variabili.

Osservazione 5.3. Quando consideriamo un polinomio $p(x, y)$ ad esempio $x^2 + y$ e lo valutiamo in un punto $(0, 3)$ implicitamente stabiliamo che tutte le occorrenze di x saranno sostituite da 0 e tutte quelle di y da 3. Ma l'insieme delle variabili non è dotato di un ordine esplicito, se ad esempio le variabili fossero $\heartsuit$ e $\diamond$, non sarebbe più chiaro a quale sostituire 0 e a quale 3. Quindi in futuro assumeremo sempre che l'insieme X delle variabili sia ordinato linearmente. Spesso si usa fissare l'insieme delle variabili $X_\omega := \{x_1, x_2, \dots\}$ come anche $X_n := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Abbiamo allora le seguenti proprietà:

1. $T_\rho(X_n)$ è la sottoalgebra di $T_\rho(X_\omega)$ generata da X_n
2. $T_\rho(X_0) \subseteq T_\rho(X_1) \subseteq T_\rho(X_2) \subseteq \dots \subseteq T_\rho(X_n)$
3. $T_\rho(X_\omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_\rho(X_n)$ Quindi ogni termine in $T_\rho(X_\omega)$ contiene un numero finito di variabili.

Definizione 5.4

Sia $t(x_1, \dots, x_n) \in T_\rho(X_n)$ e sia $\mathscr{A}$ un'algebra di tipo ρ. Definiamo, per ricorsione sulla complessità di t, l'**operazione associata a** t come la funzione n-aria su $\mathscr{A}$ data dalle seguenti.

1. Se $t = x_i$ allora $t^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) := a_i$;
2. Se $t = c$ per c operazione 0-aria allora $t^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) := c^A$;
3. Se $t = fs_1s_2 \dots s_k$ con f k-aria e $s_1, \dots, s_k \in T_\rho(X_n)$
$$t^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) := f^{\mathscr{A}}(s_1^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n), s_2^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, s_k^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n))$$

Proposizione 5.5. *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ algebre dello stesso tipo ρ.*

1. *Per ogni termine n-ario t e ogni omomorfismo $g \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$*
$$g(t^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n)) = t^{\mathscr{B}}(g(a_1), \dots, g(a_n))$$
2. *Per ogni termine $t \in T_\rho(X_\omega)$ e ogni $\theta \in \mathtt{Con}\,\mathscr{A}$*
$$\overline{a_1} \equiv_\theta \overline{a_2} \Rightarrow t^{\mathscr{A}}(\overline{a_1}) \equiv t^{\mathscr{A}}(a_2)$$

3. *Per ogni sottoinsieme Y di A*

$$\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(Y) = \{t^{\mathscr{A}}(y_1, \dots, y_n) \mid t \in T_\rho(X_n), n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_n \in Y\}$$

Dimostrazione. 1. Si dimostra per induzione sulla complessità di t.

2. Sia q_θ l'epimorfismo canonico associato a θ, allora la proprietà 2. diventa

$$q_\theta(a_1) = q_\theta(a_2) \Rightarrow t^{\mathscr{A}}(q_\theta(a_1)) = t^{\mathscr{A}}(q_\theta(a_2)) \Rightarrow q_\theta(t^{\mathscr{A}}(\overline{a_1})) = q_\theta(t^{\mathscr{A}}(\overline{a_2}))$$

dove l'ultima implicazione vale per la 1..

3. Si prova per induzione sulla complessità di t.

□

Se $X \cup \mathcal{F}_0$ è non vuoto si ha che $T_\rho(X)$ è non vuoto e quindi può essere dotato di una struttura algebrica di tipo $\rho \colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$.

Definizione 5.6

Per ogni tipo ρ e ogni insieme di variabili X, definiamo l'algebra $\mathscr{T}_\rho(X)$ il cui dominio è $T_\rho(X)$ e le cui operazioni sono definite come segue. Per ogni $f \in \mathcal{F}$, se $\rho(f) = n$ allora $f^{\mathscr{T}_\rho(X)} \colon T_\rho(X)^n \to T_\rho(X)$ ed è definita su $t_1, \dots, t_n \in T_\rho$ come $f^{\mathscr{T}_\rho}(t_1, \dots, t_n) := f t_1 \dots t_n$.

Lemma 5.7. *Sia ρ un tipo e X disgiunto da $\mathcal{F}$.*

1. *$\mathscr{T}_\rho(X)$ è generata da X.*

2. *Per ogni algebra $\mathscr{A}$ di tipo ρ, ogni funzione $h \colon X \mapsto A$ si estende univocamente ad un omomorfismo $\widehat{h} \colon \mathscr{T}(\mathscr{X}) \to \mathscr{A}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo i due punti.

1. Dire che $\mathscr{T}_\rho(X)$ è generata da X equivale a dire che $\mathrm{Sg}^{T_\rho(X)}(X) = T_\rho(X)$. Ma questo è una banale applicazione del Teorema 1.19.

2. Data una funzione funzione $h \colon X \mapsto A$ dobbiamo definire $\widehat{h}$ su tutto $T_\rho(X)$. Sia $w \in T_\rho(X)$, definiamo $\widehat{h}(w)$ per induzione sulla complessità di w. Se $\mid w \mid = 0$, allora o $w \in X$ e in questo caso $\widehat{h}(w) := h(w)$ oppure $w \in \mathcal{F}_0$ e in questo caso $\widehat{h}(w) := w^A$ (che esiste perché il tipo di A è proprio ρ). Se $\mid w \mid = n+1$ vuol dire che $w = f s_1 \dots s_k$ per qualche $s_1, \dots, s_k \in T_n$ e $f \in \mathcal{F}$. Allora definiamo

$$\widehat{h}(w) = \widehat{h}(f s_1 \dots s_k) := f^A(\widehat{h}(s_1), \dots, \widehat{h}(s_k)).$$

Si noti che, per costruzione, $\widehat{h}$ è un omomorfismo e inoltre è l'unica estensione di h con questa proprietà, in quanto il modo descritto per costruirla è l'unico che definisce un omomorfismo.

□

Definizione 5.8

Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre dello stesso tipo ρ e sia $\mathscr{U}$ un'algebra di tipo ρ. Sia $X \subseteq U$.

1. Diremo che $\mathscr{U}$ **ha la proprietà della mappa universale per** $\mathcal{K}$ su X se, per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$, ogni funzione $h\colon X \to A$ si estende univocamente a un omomorfismo $\widehat{h}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{A}$.
2. Diremo che $\mathscr{U}$ è **libera per** $\mathcal{K}$ su X se $\mathscr{U}$ ha la proprietà 1. e inoltre X genera $\mathscr{U}$.
3. Diremo che $\mathscr{U}$ è **libera in** $\mathcal{K}$ su X se $\mathscr{U}$ ha la proprietà 2. e inoltre $\mathscr{U} \in \mathcal{K}$.

Se denotiamo con $\mathtt{Alg}_\rho$ la classe di tutte le strutture di tipo ρ, il Lemma 5.7 afferma che

$$\mathscr{T}_\rho(X) \text{ è libera in } \mathtt{Alg}_\rho \text{ su } X$$

L'algebra $\mathscr{T}_\rho(X)$ è detta **algebra assolutamente libera** su X.

Osservazione 5.9. Si osservi che se $\mathscr{A}$ è un'algebra di tipo ρ allora anche l'insieme delle funzioni A^{A^n} può essere dotato naturalmente della struttura di ρ-algebra definendo le operazioni punto per punto. Se definiamo la funzione $h\colon X_n \to A^{A^n}$ tale che $h(x_i) = p_i^n$ allora poiché $T_\rho(X_n)$ è assolutamente libera, ci sarà un'unica estensione $\widehat{h}$ di h a tutto $T_\rho(X_n)$. Per induzione si vede che $\widehat{h}(t(x_1, \ldots, x_n)) = t^{\mathscr{A}}(x_1, \ldots, x_n)$, dove $t^{\mathscr{A}}$ è l'operazione associata al termine t definita precedentemente.

Teorema 5.10

Siano $\mathscr{U}_1$ e $\mathscr{U}_2$ libere in $\mathcal{K}$ su X_1 e X_2 rispettivamente. Se $\mid X_1 \mid = \mid X_2 \mid$ allora $\mathscr{U}_1 \cong \mathscr{U}_2$.

Dimostrazione. Dire che X_1 e X_2 hanno la stessa cardinalità, significa che esiste una biezione tra di essi. Chiamiamo la biezione $h\colon X_1 \to X_2$. Poiché $\mathscr{U}_1$ è libera in $\mathcal{K}$ su X_1, $h\colon X_1 \to X_2 \subseteq U_2$ si estende a un omomorfismo $\widehat{h}\colon \mathscr{U}_1 \to \mathscr{U}_2$. Similmente abbiamo un omomorfismo $\widehat{h^{-1}}\colon \mathscr{U}_2 \to \mathscr{U}_1$. Sia $u \in U_1$, allora poiché U_1 è generato da X_1 devono esistere $x_1, \ldots, x_n \in U_1$ tali che $p^{\mathscr{U}_1}(x_1, \ldots, x_n) = u$ per qualche $p \in T_\rho(X_1)$. Quindi

$$\begin{aligned} \widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h}(u) = \widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h}(p^{\mathscr{U}_1}(x_1, \ldots, x_n)) = p^{\mathscr{U}_1}(\widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h^{-1}} \circ \widehat{h}(x_n)) = \\ = p(h^{-1} \circ h(x_1), \ldots, h^{-1} \circ h(x_n)) = p(x_1, \ldots, x_n) = u. \end{aligned}$$

In maniera simile si vede che $\widehat{h} \circ \widehat{h^{-1}}$ è l'identità su U_2 e dunque $\widehat{h}$ è un isomorfismo da $\mathscr{U}_1$ in $\mathscr{U}_2$. $\square$

Proposizione 5.11. *Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre dello stesso tipo ρ, $\mathscr{U}$ un'algebra di tipo ρ e $X \subseteq U$. Se $\mathscr{U}$ è libera per $\mathcal{K}$ su X allora è anche libera per $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}) = \mathbb{V}(\mathcal{K})$ su X.*

Dimostrazione. Per provare l'enunciato è sufficiente controllare che se $\mathscr{U}$ è libera per $\mathcal{K}$ su X allora è anche libera per $\mathbb{O}(\mathcal{K})$ su X dove $\mathbb{O} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{S}, \mathbb{P}\}$.

Analizziamo il caso $\mathbb{O} = \mathbb{H}$. Sia $\mathscr{A} \in \mathbb{H}(\mathcal{K})$, cioè esiste $\mathscr{B} \in \mathcal{K}$ e $f\colon \mathscr{B} \twoheadrightarrow \mathscr{A}$. Per verificare che $\mathscr{U}$ ha la proprietà della mappa universale rispetto ad $\mathscr{A}$ consideriamo una qualsiasi assegnazione $h\colon X \to A$. Per ogni $x \in X$ si può considerare $h(x) \in A$ e la sua controimmagine attraverso f: $\overleftarrow{f}(h(x)) \subseteq B$. Per l'assioma della scelta esiste una funzione g che per ogni x "sceglie" un elemento $b_x \in \overleftarrow{f}(h(x))$, quindi $g(x) := b_x$. Ma, siccome $\mathscr{U}$ ha la proprietà della mappa universale rispetto a $\mathscr{B} \in \mathcal{K}$, g si estende ad un omomorfismo $\widehat{g}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{B}$. Consideriamo ora $f \circ \widehat{g}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{A}$. Questo è un omomorfismo, perché f e $\widehat{g}$ lo sono, e inoltre estende h, infatti preso $x \in X$

$$f \circ \widehat{g}(x) = f \circ g(x) = f(b_x) = h(x).$$

Consideriamo ora il caso $\mathbb{O} = \mathbb{S}$. Sia $\mathscr{A} \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$, verifichiamo che $\mathscr{U}$ ha la proprietà della mappa universale rispetto ad $\mathscr{A}$. Se $\mathscr{A} \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$, esiste $\mathscr{B} \in \mathcal{K}$ e $f\colon \mathscr{A} \rightarrowtail \mathscr{B}$ monomorfismo. Sia $h\colon X \to A$ una funzione, allora h può essere pensata come una funzione da X in B che quindi può essere estesa a un omomorfismo $\widehat{h}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{B}$. Controlliamo che $\overrightarrow{\widehat{h}}(U) \subseteq A$;

$$\overrightarrow{\widehat{h}}(U) = \overrightarrow{\widehat{h}}(\mathtt{Sg}^{\mathscr{U}}(X)) = \mathtt{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\widehat{h}}(X)) = \mathtt{Sg}^{\mathscr{B}}(\overrightarrow{h}(X)) \subseteq A$$

dove l'ultima inclusione vale perché $\overrightarrow{h}(X) \subseteq A$.

Infine, consideriamo il caso $\mathbb{O} = \mathbb{P}$. Sia $\mathscr{A} \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$, cioè esistono delle algebre $\mathscr{B}_i \in \mathcal{K}$ tali che $\mathscr{A} \cong \prod_{i \in I} \mathscr{B}_i$. Prendiamo una funzione $h\colon X \to A$. Allora per ogni $i \in I$ la composizione di h con l'i-esima proiezione p_i è una funzione $p_i \circ h\colon X \to B_i$, dunque si può estendere (per ipotesi) a un omomorfismo $\widehat{h_i}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{B}_i$. Considero

$$\widehat{h}\colon u \in \mathscr{U} \mapsto (\widehat{h_i}(u) \mid i \in I) \in \prod_{i \in I} \mathscr{B}_i.$$

$\widehat{h}$ estende h, infatti per ogni $x \in X$

$$\widehat{h}(x) = (\widehat{h_i}(x) \mid i \in I) = (p_i \circ h(x) \mid i \in I) = h(x).$$

$\square$

Esempio 5.12. Il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{30}$ è libero per $\{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ su $\{1\}$. Quindi per la proposizione precedente $\mathbb{Z}_{30}$ è anche libero per $\mathbb{V}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3)$ su $\{1\}$. Si può vedere che $\mathbb{V}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3)$ è la classe dei gruppi abeliani assiomatizzata dall'equazione

$$6x = 0$$

Ma $\mathbb{Z}_{30}$ non soddisfa questa equazione, quindi $\mathbb{Z}_{30} \notin \mathbb{V}(\mathbb{Z}_2 . \mathbb{Z}_3)$. Si può verificare però che che un quoziente di $\mathbb{Z}_{30}$ appartiene alla varietà $\mathbb{V}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3)$ e continua ad essere libero per essa, ovvero $\mathbb{Z}_6$.

Definizione 5.13

Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre e $\mathscr{A}$ un'algebra dello stesso tipo. Definiamo

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{K}}^{A} &:= \{\theta \in \operatorname{Con} \mathscr{A} \mid A/\theta \in \mathbb{S}(\mathcal{K})\} \\ \lambda_{\mathcal{K}}^{A} &:= \bigwedge \Lambda_{\mathcal{K}}^{A} \end{aligned}$$

Lemma 5.14. *Se $\mathcal{K}$ è una classe di algebre e $\mathscr{A}$ è dello stesso tipo, allora*

$$\mathscr{A} / \lambda_{\mathcal{K}}^{A} \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}).$$

Dimostrazione. Notiamo che $\mathscr{A} / \lambda_{\mathcal{K}}^{A}$ si immerge sottodirettamente in $\prod(\mathscr{A}/\theta \mid \theta \in \Lambda_{\mathcal{K}}^{A})$, quindi si ha

$$\mathscr{A} / \lambda_{\mathcal{K}}^{A} \underset{s}{\hookrightarrow} \prod(\mathscr{A}/\theta \mid \theta \in \Lambda_{\mathcal{K}}^{A}) \in \mathbb{P}\,\mathbb{S}(\mathcal{K}) \Longrightarrow \mathscr{A} / \lambda_{\mathcal{K}}^{A} \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}\,\mathbb{S}(\mathcal{K}) = \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}).$$

□

Teorema 5.15

Sia $\mathscr{U}$ libera per $\mathcal{K}$ su X, allora $\mathscr{U} / \lambda_{\mathcal{K}}^{U}$ è libera in $\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ su $X / \lambda_{\mathcal{K}}^{U}$.

Dimostrazione. Chiamiamo $\lambda_{\mathcal{K}} := \lambda_{\mathcal{K}}^{U}$, $\overline{\mathscr{U}} := \mathscr{U} / \lambda_{\mathcal{K}}$ $\overline{X} := X / \lambda_{\mathcal{K}}$. Per ipotesi X genera $\mathscr{U}$, quindi, siccome le immagini dirette di omomorfismi preservano i sottouniversi generati (Teorema 3.2), si ha che $\overline{X}$ genera $\overline{\mathscr{U}}$. Per il lemma precedente $\overline{\mathscr{U}} \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$. Allora, per la Proposizione 5.11, per verificare che $\mathscr{U}$ abbia la proprietà della mappa universale rispetto a $\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ basta far vedere che la ha rispetto a $\mathcal{K}$.

Sia $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e $h \colon \overline{X} \to A$ una qualsiasi funzione. Consideriamo la proiezione canonica $q \colon X \to \overline{X}$. Allora $h \circ q \colon X \to A$ si estende univocamente ad una funzione $f \colon \mathscr{U} \to$

$\mathscr{A}$. Per il teorema fondamentale di omomorfismo esiste un unico omomorfismo $g\colon \mathscr{U} / \ker f \to \mathscr{A}$ tale che $g \circ q_{\ker f} = f$. Quindi

$$\mathscr{U} / \ker f \in \mathbb{S}(\mathscr{A}) \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{K})$$

da cui $\ker f \in \Lambda_{\mathcal{K}}^{U} \Rightarrow \lambda_{\mathcal{K}} \subseteq \ker f$. Consideriamo ora l'omomorfismo $p\colon \overline{\mathscr{U}} \to \mathscr{U} / \ker f$ che associa $[u]_{\lambda_{\mathcal{K}}} \mapsto [u]_f$ (che è ben definita perché $\lambda_{\mathcal{K}} \subseteq \ker f$). Mostriamo quindi che l'omomorfismo $\widehat{h} = g \circ p\colon \overline{\mathscr{U}} \to \mathscr{A}$ estende h. Sia $x \in X$, allora

$$\widehat{h}([x]_{\lambda_{\mathcal{K}}}) = g \circ p([x]_{\lambda_{\mathcal{K}}}) = g([x]_f) = g \circ q_{\ker f}(x) = f(x) = h \circ q(x) = h([x]_{\lambda_{\mathcal{K}}}).$$

□

Osservazione 5.16. Si noti che dal teorema precedente si ha che, se $\mathscr{U}$ è libera per $\mathcal{K}$ su X, allora $\mathscr{U} / \lambda_{\mathcal{K}}^{U}$ è libera anche in $\mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}) = \mathbb{V}(\mathcal{K})$ su $X/\lambda_{\mathcal{K}}^{U}$.

Osservazione 5.17. Se $\mathcal{K}$ contiene almeno un'algebra non banale, allora, nelle ipotesi del teorema precedente, c'è una biezione tra X e X/λ_k.

Infatti, se $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ è non banale, vuol dire che $\exists\, a, b \in A$ con $a \neq b$. Siano $x, y \in X$, poiché $\mathscr{U}$ è libera per K su X, posso considerare una qualsiasi funzione f tale che $f(x) = a$ e $f(y) = b$ e questa si estende a un omomorfismo da $\mathscr{U}$ in $\mathscr{A}$. Per il teorema fondamentale di omomorfismo $\exists\, \psi \in \mathtt{Con}\,\mathscr{U}$ tale che $\widehat{f} = i \circ q_\psi$ dove i è un monomorfismo e q_ψ è il quoziente canonico rispetto a ψ. Ma allora $\mathscr{U}/\psi \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$ e inoltre $(x, y) \notin \psi$ perché $q_\psi(x) \neq q_\psi(y)$ (infatti i è un monomorfismo e $\widehat{f}(x) \neq \widehat{f}(y)$).

Applichiamo ora il Teorema 5.15 a $T_\rho(X)$ (l'algebra assolutamente libera su X in $\mathtt{Alg}_\rho$).

Definizione 5.18

Sia K una classe di algebre di tipo ρ e sia X un qualsiasi insieme. Se $X \cup \mathcal{F}_0 \neq \varnothing$, definiamo $\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X) := \mathscr{T}_\rho(X)/\lambda_{\mathcal{K}}$.

Proposizione 5.19. *Se V è una varietà di algebre di tipo ρ e se $X \cup \mathcal{F}_0 \neq \varnothing$, allora $F_V(X)$ è libera in V su X. Se $V = \mathbb{V}(\mathcal{K})$ allora $F_V(X) \cong \mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X) \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una banale applicazione del teorema 5.15. □

Corollario 5.20. *Ogni varietà di algebre V contiene algebre libere in V su qualsiasi insieme X.*

Esempio 5.21. Vediamo degli esempi di algebre libere.

1. Sia A la varietà dei gruppi abeliani con operazioni fondamentali $(+, -, 0)$. Per visualizzare le algebre libere in A dobbiamo considerare i termini esprimibili nel linguaggio $(+, -, 0)$ e quozientarli rispetto a λ_A.

Supponiamo di avere solo due variabili. Termini diversi possono appartenere alla stessa classe di equivalenza rispetto a λ_A, ad esempio:

$$x_1 + (x_2 + x_2) \neq (x_1 + (x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)$$

ma

$$[x_1 + (x_2 + x_2)]_{\lambda_A} = [(x_1 + (x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)]_{\lambda_A}$$

Notiamo che

$$F_A(X_2) = \{k_1x_1 + k_2x_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \{(k_1, k_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$$

In generale, se abbiamo n variabili,

$$F_A(X_n) = \{k_1x_1 + \cdots + k_nx_n \mid k_i \in \mathbb{Z} \text{ con } i \leq n\} \cong \mathbb{Z}^n$$

2. Sia R la varietà degli anelli commutativi con unità nel linguaggio $(+, -, \cdot, 0, 1)$. Allora, ad esempio,

$$[x_1 \cdot x_3 + x_2 - (x_2 \cdot x_2)]_{\lambda_R} = [x_1 \cdot x_3 - x_1 + x_2 - (x_2 \cdot x_2) + x_1]_{\lambda_R}$$

In generale si ha

$$F_R(X_n) = \{p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]\} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$$

Se non c'è 1 nel linguaggio, allora

$$F_{R^-}(X_n) = \{p \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \mid p(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ volte}}) = 0\}$$

3. Sia D la varietà dei reticoli distributivi.

$$\begin{aligned} F_D(X_1) &= \{x_1, x_1 \wedge x_1, x_1 \vee x_1, (x_1 \wedge x_1) \vee x_1, \ldots\}/\lambda_D = \{[x_1]_{\lambda_D}\} \\ F_D(X_2) &= \{x_1, x_2, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, x_2 \wedge x_1, x_1 \wedge (x_1 \vee x_2), \ldots\}/\lambda_D \\ &= \{[x_1]_{\lambda_D}, [x_2]_{\lambda_D}, [x_1 \wedge x_2]_{\lambda_D}, [x_1 \vee x_2]_{\lambda_D}\} \end{aligned}$$

Al crescere di n, $F_D(X_n)$ diventa subito molto complicato da studiare, in particolare per $n \geq 8$ non è conosciuta nemmeno la cardinalità di $F_D(X_n)$.

5.2 IL TEOREMA DI BIRKHOFF

Definizione 5.22

Sia ρ un tipo. Un'**equazione** di tipo ρ è una qualsiasi coppia di termini (r, s) nel linguaggio ρ. Di solito le equazioni si scrivono

$$r \approx s.$$

Se $\mathscr{A}$ è un'algebra di tipo ρ, diremo che $\mathscr{A}$ **soddisfa** un'equazione $r \approx s$ e scriveremo $\mathscr{A} \vDash r \approx s$ se si ha $r^{\mathscr{A}} = s^{\mathscr{A}}$. Se $\mathcal{K}$ è una classe di algebre dello stesso tipo ρ diremo che $\mathcal{K}$ soddisfa un'equazione (di tipo ρ) $r \approx s$ se per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ si ha $\mathscr{A} \vDash r \approx s$. Se ciò vale scriveremo $\mathcal{K} \vDash r \approx s$.

Esempio 5.23. Sia ρ un tipo con una sola operazione $\cdot$ binaria. Sia $r = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ e $s = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$. Allora $\mathtt{Alg}_\rho \nvDash r \approx s$, ma se consideriamo la classe di tutti i semigruppi $Sem \subseteq \mathtt{Alg}_\rho$, allora

$$Sem \vDash r \approx s.$$

Lemma 5.24. *Per ogni classe di algebre $\mathcal{K}$, le classi $\mathbb{S}(\mathcal{K})$, $\mathbb{H}(\mathcal{K})$ e $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ soddisfano esattamente le stesse equazioni di $\mathcal{K}$.*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{K}), \mathbb{H}(\mathcal{K}), \mathbb{P}(\mathcal{K})$, segue immediatamente dalla definizione che se un equazione $s \approx t$ è valida in $\mathbb{S}(\mathcal{K})$, $\mathbb{H}(\mathcal{K})$ oppure $\mathbb{P}(\mathcal{K})$ allora è valida anche in $\mathcal{K}$. Per mostrare l'altra implicazione supponiamo che $\mathcal{K} \vDash s \approx r$, questo vuol dire che, per ogni algebra $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$, $\mathscr{A} \vDash s \approx r$. Sia ora $\mathscr{B} \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$, dunque deve esistere $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ tale che $\mathscr{B} \leq \mathscr{A}$. Ma in $\mathscr{A}$ vale $s^{\mathscr{A}} = r^{\mathscr{A}}$ e ciò significa che per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$

$$s^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) = r^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n).$$

Allora, a maggior ragione, ciò sarà vero per tutte le $b_1, \dots, b_n \in B \subseteq A$, dunque $\mathscr{B} \vDash s \approx r$. Se invece $\mathscr{B} \in \mathbb{H}(\mathcal{K})$ allora deve esistere $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e un epimorfismo $h \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$. Poiché $\mathscr{A} \vDash s \approx r$ abbiamo che

$$\forall\, a_1, \dots, a_n \quad s^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) = r^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n)$$

Siano $b_1, \dots, b_n \in B$ qualsiasi, poiché h è suriettiva devono esistere $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $h(a_i) = b_i$, dunque

$$\begin{aligned} s^{\mathscr{B}}(b_1, \dots, b_n) = & s^{\mathscr{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = h(s^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n)) = \\ = & h(r^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n)) = r^{\mathscr{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)) = \\ = & r^{\mathscr{B}}(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Dunque possiamo concludere $\mathscr{B} \vDash s \approx r$.

Infine se $\mathscr{B} \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$ allora devono esistere $\mathscr{A}_i \in \mathcal{K}$ per $i \in I$ tali che $\mathscr{B} \cong \prod_{i \in I} \mathscr{A}_i$. Se $b_1, \ldots, b_n \in B$, allora

$$\begin{aligned} s^{\mathscr{B}}(b_1, \ldots, b_n) =& (s^{\mathscr{A}_i}(\pi_i(b_1), \ldots, \pi_i(b_n)))_{i \in I} = \\ =& (r^{\mathscr{A}_i}(\pi_i(b_1), \ldots, \pi_i(b_n)))_{i \in I} = r^{\mathscr{B}}(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

□

Lemma 5.25. *Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre dello stesso tipo ρ, allora $\mathcal{K} \vDash r \approx s$ se e solo se, per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e per ogni omomorfismo $h \colon \mathscr{T}(X_\omega) \to \mathscr{A}$, si ha $h(r) = h(s)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni.

$\boxed{\Rightarrow}$ Assumiamo che $\mathcal{K} \vDash r \approx s$, allora per ogni $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ vale che $\mathscr{A} \vDash r \approx s$, ma ciò significa che $r^{\mathscr{A}} = s^{\mathscr{A}}$. Quindi in particolare, per qualunque omomorfismo $h \colon \mathscr{T}(X_\omega) \to \mathscr{A}$

$$r^{\mathscr{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) = s^{\mathscr{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)),$$

ma h è un omomorfismo quindi

$$h(r) = h(r^{\mathscr{T}(X_\omega)}(x_1, \ldots, x_n)) = h(s^{\mathscr{T}(X_\omega)}(x_1, \ldots, x_n) = h(s)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Presa $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e $a_1, \ldots, a_n \in A$ dobbiamo mostrare che

$$r^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n) = s^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Prendiamo la funzione $h \colon X_\omega \to A$ definita da $h(x_i) = a_i$ per $i \leq n$. Essa si estende ad un omomorfismo $\widehat{h} \colon T(X_\omega) \to \mathscr{A}$ e per ipotesi $\widehat{h}(r) = \widehat{h}(s)$. Allora

$$\begin{aligned} r^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n) =& r^{\mathscr{A}}(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n)) = \widehat{h}(r^{T(X_\omega)}(x_1, \ldots, x_n)) = \\ =& \widehat{h}(s^{T(X_\omega)}(x_1, \ldots, x_n)) = s^{\mathscr{A}}(\widehat{h}(x_1), \ldots, \widehat{h}(x_n)) = \\ =& s^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

□

Teorema 5.26

Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre e $r \approx s$ un'equazione dello stesso tipo. Allora sono equivalenti:

(a) $\mathcal{K} \vDash r \approx s$

(b) $\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_\omega) \vDash r \approx s$

(c) $(r, s) \in \lambda_{\mathcal{K}}$

Dimostrazione. Proviamo le varie implicazioni.

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Se $\mathcal{K} \vDash r \approx s$, allora per il lemma 5.24 anche $\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K}) \vDash r = s$ ma $\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n) \in \mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ e quindi deve soddisfare $r = s$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (c)}$ Per ipotesi $r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_\omega)}([x_1]_{\lambda_{\mathcal{K}}}, \dots, [x_n]_{\lambda_{\mathcal{K}}}) = s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_\omega)}([x_1]_{\lambda_{\mathcal{K}}}, \dots, [x_n]_{\lambda_{\mathcal{K}}})$, allora detto $q_{\lambda_{\mathcal{K}}}$ la proiezione canonica si ha

$$\begin{aligned} q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(r^{T(X_\omega)}(x_1, \dots, x_n)) =& r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_\omega)}(q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(x_1), \dots, q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(x_n)) = \\ =& s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_\omega)}(q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(x_1), \dots, q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(x_n)) = \\ =& q_{\lambda_{\mathcal{K}}}(s^{T(X_\omega)}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

$\boxed{(c) \Rightarrow (a)}$ Dobbiamo mostrare che se $(r, s) \in \lambda_{\mathcal{K}}$ allora $\mathcal{K} \vDash r \approx s$. Possiamo utilizzare il lemma 5.25. Per fare ciò prendiamo un'algebra arbitraria $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e un omomorfismo $h \colon T(X_\omega) \to \mathscr{A}$. Per il teorema fondamentale degli omomorfismi

$$T(X_\omega) / \ker h \in \mathbb{S}(\mathscr{A}).$$

Quindi per definizione di $\lambda_{\mathcal{K}}$ si ha $\lambda_{\mathcal{K}} \subseteq \ker h$. Ma per ipotesi $(r, s) \in \lambda_{\mathcal{K}}$ quindi $(r, s) \in \ker h$ se e soltanto se $h(r) = h(s)$.

□

Se consideriamo una sola equazione $r \approx s$ dove r ed s hanno arietà al più n, allora nel teorema precedente si può considerare $\mathscr{T}_\rho(X_n)$ invece di $\mathscr{T}_\rho(X_\omega)$. Inoltre, come mostrato nel seguente corollario, è sufficiente verificare che una data equazione valga rispetto ai generatori liberi di $\mathscr{T}_\rho(X_n)$ per essere sicuri che essa valga nella varietà a cui $\mathscr{T}_\rho(X_n)$ appartiene.

Corollario 5.27. *Se $\mathcal{K}$ è una classe di algebre, $r, s \in T(X_n)$ e $\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)$ l'algebra liberamente generata da $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, allora*

$$\mathcal{K} \vDash r \approx s \text{ se e soltanto se } r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n) = s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n).$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{K} \vDash r \approx s$, ragionando come nel Teorema 5.26 (ma prendendo solo n variabili) si ha che $\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n) \models r \approx s$ e quindi, in particolare $r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n) = s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n)$. Viceversa, se $r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n) = s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n)}(x_1, \dots, x_n)$, prendiamo un'algebra arbitraria $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e $a_1, \dots, a_n \in A$, dobbiamo mostrare che $r^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) = s^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n)$. Consideriamo la mappa $h \colon \mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n) \to A$ tale che $h(x_i) = a_i$ per ogni $i \leq n$ e estendiamolo a un omomorfismo $\hat{h} \colon \mathscr{F}_{\mathcal{K}}(X_n) \to \mathscr{A}$. Si ha

$$\begin{aligned} r^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n &= r^{\mathscr{A}}(h(x_1), \dots, h(x_n) = \hat{h}(r^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(\mathscr{X})}(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \hat{h}(s^{\mathscr{F}_{\mathcal{K}}(\mathscr{X})}(x_1, \dots, x_n)) = s^{\mathscr{A}}(h(x_1), \dots, h(x_n)) = s^{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.28. Sia $\mathtt{Eq}_\rho := T^2_\rho(X)$, cioè l'insieme di tutte le possibili equazioni nel linguaggio ρ. Se $\mathcal{K}$ è una classe di algebre di tipo ρ e T un'insieme di equazioni di tipo ρ, possiamo definire

$$\begin{aligned} Id(\mathcal{K}) &:= \{\epsilon \in \mathtt{Eq}_\rho \mid A \vDash \epsilon \quad \forall A \in \mathcal{K}\} \\ Mod(T) &:= \{A \in \mathtt{Alg}_\rho \mid A \vDash \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in T\} \end{aligned}$$

Si noti che con la nostra precedente notazione potremmo scrivere $Id(\mathcal{K}) = \mathcal{K}^{\lhd}$ e $Mod(T) = T^{\rhd}$, dunque $Mod()$ e $Id()$ formano una connessione di Galois e le loro composizioni danno degli operatori di chiusura:

$$\mathcal{K} \subseteq Mod(Id(\mathcal{K})) \text{ e } T \subseteq Id(Mod(T)).$$

Teorema 5.29 (Birkhoff)

Ogni varietà è assiomatizzabile da equazioni (cioè è una classe equazionale). Viceversa ogni classe assiomatizzabile da equazioni è una varietà.

Dimostrazione. Data una varietà V dobbiamo trovare delle equazioni che la assiomatizzano. La strategia più naturale è prendere come assiomatizzazione di V proprio $Id(V)$. Sicuramente $V \subseteq Mod(Id(V))$, dobbiamo verificare l'altra inclusione ovvero $\overline{V} := Mod(Id(V)) \subseteq V$.

Prendiamo $\mathscr{A} \in \overline{V}$, sia Y un insieme di cardinalità $\max\{|A|, \omega\}$. Possiamo allora trovare una funzione suriettiva $h \colon Y \to A$. Questa si estende a un omomorfismo $\hat{h} \colon \mathscr{T}_\rho(Y) \to \mathscr{A}$. Consideriamo allora $\mathscr{F}(Y) := \mathscr{T}_\rho(Y)/\lambda_V$. Vogliamo dimostrare che $\lambda_V = \ker q_{\lambda_V} \subseteq \ker \hat{h}$ cosicché, in base al Lemma 1.31, si possa asserire l'esistenza di un epimorfismo da $\mathscr{F}(\mathscr{Y})$ in $\mathscr{A}$.

Siano $u, v \in T_\rho(Y)$ e supponiamo che $(u, v) \in \ker q_{\lambda_V}$, cioè $q_{\lambda_V}(u) = q_{\lambda_V}(v)$. Poiché $u, v \in T_\rho(Y)$ devono esistere $y_1, \dots, y_n \in Y$ tali che $u = u(y_1, \dots, y_n)$ e $v = v(y_1, \dots, y_n)$. Per il Teorema 5.26 $(u, v) \in \lambda_V$ implica $V \vDash u \approx v$, dunque $u \approx v \in Id(V)$. Ma $\mathscr{A} \in \overline{V}$ quindi $A \vDash u \approx v$, allora

$$\begin{aligned} \hat{h}(u) = \hat{h}(u(y_1, \dots, y_n)) &= u^{\mathscr{A}}(\hat{h}(y_1), \dots, \hat{h}(y_n)) = \\ &= v^{\mathscr{A}}(\hat{h}(y_1), \dots, \hat{h}(y_n)) = \hat{h}(v(y_1, \dots, y_n)) = \hat{h}(v) \end{aligned}$$

dunque $(u, v) \in \ker \hat{h}$.

Ne consegue che esiste un epimorfismo da $\mathscr{F}(Y)$ in $\mathscr{A}$, quindi $\mathscr{A} \in \mathbb{H}(V) = V$ perché V è una varietà.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_\rho(Y) \arrow[r, two heads, "\mathscr{F}(Y)"] \arrow[d, two heads, "q_{\lambda_\mathcal{K}}"'] & \mathscr{A} \\ \mathscr{F}(Y) \arrow[ur, dashed, two heads] & \end{tikzcd}$$

Per quanto riguarda l'altra implicazione, ricordiamo che, per il Lemma 5.24, $\mathcal{K} \models r \approx s$ se e soltanto se $\mathbb{O}(\mathcal{K}) \models r \approx s$ per $\mathbb{O} \in \{\mathbb{H}, \mathbb{S}, \mathbb{P}\}$. Dunque se una classe di algebre $\mathcal{K} = Mod(T)$ con T insieme di equazioni, allora $\mathcal{K} = \mathbb{H}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}(\mathcal{K})$ cioè $\mathcal{K}$ è una varietà. $\square$

6

TEORIA DELLE CATEGORIE

La nozione di categoria fu introdotta per la prima volta da Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane nel 1945 nell'ambito della topologia algebrica. Da qui in poi si è sviluppata ed affermata come strumento di studio per le strutture matematiche analizzate da un punto di vista molto generale. Una grande quantità di nozioni matematiche può essere espressa in termini categoriali o meglio in termini di oggetti e frecce tra questi ultimi. Sono questi infatti le uniche nozioni primitive utilizzate in teoria delle Categorie. Conosciamo numerosi esempi di strutture come i gruppi, gli anelli, gli spazi topologici, e ognuna di queste ha particolari funzioni che ne conservano le proprietà che possiamo chiamare in generale morfismi. Ma cosa hanno in comune tutti questi esempi? Partendo da questa riflessione si dà la definizione di categoria. Quello che stupisce è che non sono solo le classi di strutture prima citate a rientrare nel modello fornito da una categoria, in più le frecce, che intuitivamente immaginiamo come delle funzioni, si possono vedere in maniera molto astratta come delle relazioni tra oggetti. Da questo si capisce che lo sforzo di generalizzazione è andato a buon fine, infatti, partendo da casi particolari (le strutture matematiche) giungiamo ad una definizione assiomatica che include i casi di partenza ma non si esaurisce con questi.

6.1 DEFINIZIONE DI CATEGORIA

Definizione 6.1

Una **categoria** $\mathscr{C}$ comprende:

1. una collezione di $\mathscr{C}$-**oggetti** ;
2. una collezione di $\mathscr{C}$-**frecce** (o $\mathscr{C}$-**morfismi**);
3. un'operazione che assegna ad ogni $\mathscr{C}$-freccia f due $\mathscr{C}$-oggetti: $\mathrm{dom} f$ e $\mathrm{cod} f$; rispettivamente il dominio e il codominio di f. Possiamo indicare una

freccia con il simbolo $f: a \to b$ oppure $a \xrightarrow{f} b$;

4. un'operazione di composizione tra le frecce che goda della proprietà associativa;

5. per ogni $\mathscr{C}$-oggetto b, una freccia identità $1_b: b \to b$ che sia elemento neutro rispetto alla composizione di frecce.

Esempio 6.2. Un esempio banale di categoria è la categoria unitaria costituita da un solo elemento e da una sola freccia, la freccia identità.

Esempio 6.3. Consideriamo un insieme con una relazione di pre-ordine R. Possiamo costruire una categoria che ha come oggetti gli elementi dell'insieme, stipulando che c'è una freccia tra due elementi p e q se pRq. Questo è un esempio di categoria nella quale le frecce non sono funzioni. Notiamo inoltre che per ogni coppia di oggetti in P esiste al più una freccia tra i due, chiameremo **categoria preordinata** una per la quale è soddisfatta questa proprietà.

Esempio 6.4. Consideriamo la collezione di tutti gli insiemi. Questa collezione, che indichiamo con il simbolo **Set**, è una categoria i cui oggetti sono gli insiemi e le frecce sono le funzioni tra questi ultimi. È una delle categorie più importanti che viene usata anche come modello per arrivare agli assiomi della definizione di topos.

CATEGORIA DISCRETA Quando in una categoria le frecce sono le sole frecce identità si parla di **categoria discreta**. In questo caso le frecce si possono identificare con gli oggetti e quindi la categoria è costituita solo da questi ultimi.

SOTTOCATEGORIA Sia $\mathscr{C}$ una categoria e a e b due suoi oggetti. Introduciamo la classe $Hom_{\mathscr{C}}(a, b) = \{f \mid f: a \to b\}$. Una categoria $\mathscr{C}$ è una **sottocategoria** di una categoria $\mathscr{D}$, indicato con il simbolo $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, se tutti gli $\mathscr{C}$-oggetti sono anche $\mathscr{D}$-oggetti e $Hom_{\mathscr{C}}(a, b) \subseteq Hom_{\mathscr{D}}(a, b)$ per ogni coppia di oggetti a e b.

La categoria $\mathscr{C}$si dice una sottocategoria **piena** di $\mathscr{D}$ se è una sottocategoria di $\mathscr{D}$ e in più $Hom_{\mathscr{C}}(a, b) = Hom_{\mathscr{D}}(a, b)$.

CATEGORIA PRODOTTO Consideriamo due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, possiamo costruire la categoria **prodotto** $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ che ha per oggetti le coppie $\langle a, b\rangle$ e per frecce le coppie $\langle f, g\rangle$, definite componente per componente.

CATEGORIE FRECCIA Sia $\mathscr{C}$ una categoria. Con il simbolo $\mathscr{C}^{\to}$ indichiamo la categoria che ha come oggetti le $\mathscr{C}$-frecce e dati dunque due $\mathscr{C}^{\to}$-oggetti f e g, la freccia tra di loro è la coppia $\langle h, k\rangle$ tale che il diagramma sottostante è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & c \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[k]{} & d \end{array}$$

$\mathscr{C}^{\rightarrow}$ viene chiamata categoria **freccia**.

CATEGORIA COMMA Sia $\mathscr{C}$ una categoria e a un suo oggetto, possiamo allora costruire la categoria $\mathscr{C}\downarrow a$ di oggetti su a, che ha come oggetti le $\mathscr{C}$-frecce con codominio a e una generica freccia da $f\colon b \to a$ a $g\colon c \to a$, è data da una $\mathscr{C}$-freccia $h\colon b \to c$ tale che $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Dualmente si definisce la categoria $\mathscr{C}\uparrow a$. Sia $\mathscr{C}\downarrow a$ che $\mathscr{C}\uparrow a$ prendono il nome di categorie **comma**.

6.2 NOZIONI BASE

FRECCE MONICHE Una freccia $f\colon a \to b$ in una categoria $\mathscr{C}$ è **monica** se e solo se per ogni coppia di frecce $g, h\colon c \to a$ si ha:

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

cioè una freccia si dice monica se è cancellabile a sinistra. Una freccia monica si indica anche con il simbolo $f\colon a \rightarrowtail b$.

Dualizzando la precedente definizione si ottiene il concetto di freccia epica.

FRECCE EPICHE Una freccia $f\colon a \to b$ in una categoria $\mathscr{C}$ è **epica** se e solo se per ogni coppia di frecce $g, h\colon b \to c$, si ha:

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

cioè una freccia si dice epica se è cancellabile a destra. Una freccia epica si indica con il simbolo $f\colon a \twoheadrightarrow b$.

FRECCE INVERTIBILI Una freccia $f\colon a \to b$ in una categoria $\mathscr{C}$ è **iso** o **invertibile** se e solo se esiste una $\mathscr{C}$-freccia $g\colon b \to a$ tale che $f \circ g = 1_b$ e $g \circ f = 1_a$. Una freccia g così fatta è unica e quindi può essere chiamata l'**inversa** di f e la indichiamo con il simbolo f^{-1}. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- se f è iso lo è anche f^{-1};
- se f e g sono iso, lo è anche $f \circ g$ e la sua inversa è $g^{-1} \circ f^{-1}$
- una freccia iso è sempre monica;
- una freccia iso è sempre epica.

Non è detto però che una freccia che sia contemporaneamente monica e epica sia anche iso[1].

OGGETTI ISOMORFI Una volta data la definizione di freccia iso si può dare la definizione di oggetti isomorfi: due oggetti a e b sono **isomorfi**, e si scrive $a \cong b$, se esiste una freccia $f\colon a \to b$ che sia iso. Si dice inoltre che un oggetto è *unico a meno di isomorfismi* se possiede una particolare proprietà e ogni altro oggetto che possiede la medesima proprietà è a esso isomorfo.

CATEGORIE SKELETAL Una categoria si dice **skeletal** se vale la seguente proprietà: $a \cong b \Rightarrow a = b$. Un poset è un esempio di categoria skeletal pre-ordinata.

OGGETTI INIZIALI Un oggetto 0 è **iniziale** in una categoria $\mathscr{C}$ se per ogni $\mathscr{C}$-oggetto a esiste una sola freccia da 0 ad a. Tale freccia si indica con il simbolo $!\colon 0 \to a$ oppure $0_a\colon 0 \to a$. Inoltre tutti gli oggetti iniziali di una categoria sono isomorfi tra di loro e quindi possiamo dire che l'oggetto iniziale, se esiste, è unico a meno di isomorfismi.

OGGETTI TERMINALI Un oggetto 1 si dice **terminale** in una categoria $\mathscr{C}$ se per ogni $\mathscr{C}$-oggetto a esiste una ed una sola freccia da a ad 1. Per indicare la freccia unica possiamo usare il simbolo $!\colon a \to 1$ oppure $1_a\colon a \to 1$. Anche in questo caso, se esiste, l'oggetto terminale è unico a meno di isomorfismi.

DUALITÀ Data una categoria $\mathscr{C}$ possiamo sempre costruire la sua duale che indichiamo $\mathscr{C}^{op}$. Tale categoria ha come oggetti gli stessi di $\mathscr{C}$ ma le frecce sono le duali, cioè se $f\colon a \to b$ è una $\mathscr{C}$-freccia, allora $f^{op}\colon b \to a$ è una freccia di $\mathscr{C}^{op}$ e queste sono tutte e sole le frecce di $\mathscr{C}^{op}$. La freccia $f^{op} \circ g^{op}$ si può definire quando è definita $g \circ f$ e si ha $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Sia Σ un'affermazione espressa nel linguaggio delle categorie. Se Σ è vera in $\mathscr{C}$ allora Σ^{op} sarà vera in $\mathscr{C}^{op}$. Ma allora se Σ è un teorema che vale in tutte le categorie, Σ^{op} vale in ogni categoria della forma $\mathscr{C}^{op}$ e quindi in tutte perché una qualsiasi categoria si può vedere sempre come la duale della sua duale. Da qui il **principio di dualità**: se una proposizione è vera in tutte le categorie lo sarà anche la sua duale.

[1] Notare che i concetti di monicità e iniettività oppure di epicità e suriettività non sono equivalenti, infatti valgono le implicazioni: iniettiva$\Rightarrow$monica, suriettiva $\Rightarrow$ epica, ma non è detto che valgano le implicazioni contrarie.

PRODOTTO Un **prodotto** di due oggetti a e b in una categoria $\mathscr{C}$ è un oggetto $a \times b$ con due frecce $(pr_a \colon a \times b \to a,\ pr_b \colon a \times b \to b)$ tale che per ogni coppia di frecce della forma $(f \colon c \to a,\ g \colon c \to b)$ esiste una sola freccia $\langle f, g\rangle : c \to a \times b$ per la quale $pr_a \circ \langle f, g\rangle = f$ e $pr_b \circ \langle f, g\rangle = g$, cioè tale che il diagramma seguente è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "pr_a"] \arrow[r, "pr_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

Abbiamo detto “un” prodotto perché questo è definito a meno di isomorfismi. $\langle f, g\rangle$ viene detta la **freccia prodotto** di f e g rispetto alle proiezioni pr_a e pr_b.

CO-PRODOTTO Un **co-prodotto** di due $\mathscr{C}$-oggetti a e b è un oggetto $a + b$ insieme con due frecce $(i_a \colon a \to a + b,\ i_b \colon b \to a + b)$ tale che per ogni coppia di frecce della forma $(f \colon a \to c,\ g \colon b \to c)$ esiste esattamente una freccia $[f, g] : a + b \to c$ per la quale $[f, g] \circ i_a = f$ e $[f, g] \circ i_b = g$. Tale proprietà si può esprimere anche dicendo che il diagramma seguente è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Anche in questo caso il co-prodotto esiste a meno di isomorfismi e $[f, g]$ prende il nome di **freccia co-prodotto** di f e g rispetto alle iniezioni i_a e i_b.

EQUALIZZATORI Una freccia $i \colon e \to a$ è un’**equalizzatore** di una coppia di frecce $f, g \colon a \to b$ se:

1. $f \circ i = g \circ i$;
2. per ogni freccia $h \colon c \to a$ tale che $f \circ h = g \circ h$, esiste una ed una sola freccia $k \colon c \to e$ tale che $i \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[rr, "i"] & & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& c \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Teorema 6.5

Ogni equalizzatore è monico.

L'inverso del teorema non vale in tutte le categorie.

Teorema 6.6

In ogni categoria, un equalizzatore epico è iso.

CO-EQUALIZZATORE Una freccia $q\colon b \to e$ è un **co-equalizzatore** di una coppia di frecce $f, g\colon a \to b$ se:

1. $q \circ f = q \circ g$;
2. per ogni freccia $h\colon b \to c$ tale che $h \circ f = h \circ g$, esiste una ed una sola freccia $k\colon e \to c$ tale che $k \circ q = h$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "h"'] & & e \arrow[dl, dashed, "k"] \\
& & c &
\end{tikzcd}
$$

Dualizzando i risultati precedenti otteniamo subito che

Teorema 6.7

Ogni co-equalizzatore è epico.

Teorema 6.8

In ogni categoria, un co-equalizzatore monico è iso.

LIMITI E CO-LIMITI Per dare questo concetto dobbiamo fornire delle definizioni preliminari.

Un **diagramma** D in una categoria $\mathscr{C}$ è una collezione di oggetti $d_i, \ldots, d_j$, insieme con frecce del tipo $g \colon d_i \to d_j$.

Un **cono** per un diagramma D è un oggetto c insieme con una freccia $f_i \colon c \to d_i$ per ogni oggetto d_i in D, tale che il diagramma seguente commuti.

$$\begin{tikzcd} d_i \arrow[rr, "g"] & & d_j \\ & c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

Indichiamo un D-cono con il simbolo $\{f_i \colon c \to d_i\}$.

Un **limite** per un diagramma D è un D-cono $\{f_i \colon c \to d_i\}$ tale che per ogni altro D-cono $\{f_i' \colon c' \to d_i\}$ esiste una ed una sola freccia $f \colon c' \to c : f \circ f_i = f_i'$.

$$\begin{tikzcd} & d_i & \\ c' \arrow[ur, "f_i'"] \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

Quando esiste questo cono limite si dice che gode della *proprietà universale* rispetto ai D-coni.

Dualmente possiamo definire un **co-cono** $\{f_i \colon d_i \to c\}$ per un diagramma D. Un **co-limite** per D è allora un co-cono $\{f_i \colon d_i \to c\}$ col la *proprietà co-universale*: per ogni altro co-cono $\{f_i' \colon d_i \to c'\}$, esiste esattamente una freccia $f \colon c \to c'$ tale che il seguente diagramma commuta per ogni d_i in D.

$$\begin{tikzcd} & d_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_i'"] & \\ c \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c' \end{tikzcd}$$

Molti dei concetti già introdotti e di quelli successivi si possono presentare in termini di limiti e colimiti.

PULLBACK Il pullback di una coppia di frecce $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ è un limite del diagramma

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

Un cono per questo diagramma è costituito da tre frecce ma una resta completamente determinata per la proprietà di commutatività. Quindi possiamo dare la definizione di pullpack in maniera più esplicita.

Un **pullback** di una coppia $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ è una coppia $a \xleftarrow{g'} d \xrightarrow{f'} b$ per la quale $f \circ g' = g \circ f'$ e per ogni coppia $a \xleftarrow{h} e \xrightarrow{j} b$ tale che $f \circ h = g \circ j$ esiste esattamente una freccia $k \colon e \to d$ tale che $h = g' \circ k$ e $j = f' \circ k$. Il tutto è descritto dal diagramma seguente che per la proprietà del pullback è commutativo.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

Il quadrato (f, g, f', g') è detto *quadrato pullback* oppure *quadrato Cartesiano* e f' si chiama *pullback di f attraverso g* e si indica con il simbolo $g^*(f)$. Un'analoga definizione si ha per g'.

Dualmente di ottiene il concetto di **pushout**.

Un importante risultato è il seguente.

Teorema 6.9

(Pullback lemma) Se un diagramma della forma

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

commuta, allora:

1. *se i due quadrati interni sono pullback, allora lo è il rettangolo esterno;*

2. *se il rettangolo esterno e il quadrato sulla destra sono pullback, allora lo è anche il quadrato sulla sinistra.*

COMPLETEZZA Una categoria $\mathscr{C}$ si dice **completa** (**co-completa**) se ogni diagramma in $\mathscr{C}$ ha limite (co-limite) in $\mathscr{C}$.

Una categoria si dice **bi-completa** se è contemporaneamente completa e co-completa.

Una categoria si dice **finitamente completa** se ogni diagramma finito, ossia ogni diagramma con un numero finito di oggetti e frecce tra questi, ammette limite.

Analogamente sono date le definizioni di categoria **finitamente co-completa** e **finitamente bi-completa**.

Teorema 6.10

Se la categoria $\mathscr{C}$ ha un oggetto terminale e un pullback per ogni coppia di frecce con codominio in comune, allora $\mathscr{C}$ è finitamente completa.

ESPONENZIALE Una categoria ha **esponenziale** se, per ogni coppia di oggetti a e b esiste sempre il prodotto ed esiste un oggetto b^a e una freccia $ev\colon b^a \times a \to b$, chiamata **freccia valutazione** tale che per ogni oggetto c e per ogni freccia $g\colon c \times a \to b$ esiste una ed una sola freccia $\hat{g}\colon c \to b^a : ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[dr, "ev"] & \\
& b \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

La corrispondenza g-$\hat{g}$ stabiliscono una biezione $Hom_{\mathscr{C}}(c \times a, b) \cong Hom_{\mathscr{C}}(c, b^a)$ e tali frecce vengono dette *aggiunti esponenziali* l'una dell'altra.

Una categoria che sia finitamente completa e che abbia esponenziale per ogni coppia di oggetti si dice **Cartesiana chiusa**.

SOTTOGGETTI Un **sottoggetto** di un oggetto d è una freccia monica $f\colon a \rightarrowtail d$.

Dati due sottoggetti di d, ossia due frecce $f\colon a \rightarrowtail d$ e $g\colon b \rightarrowtail d$, poniamo $f \subseteq g$ se e solo se esiste una freccia $h\colon a \to b$ tale che $f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, tail, "f"] & \\
& d \\
b \arrow[ur, tail, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

La relazione $\subseteq$ è riflessiva e transitiva. Consideriamo adesso il caso in cui $f \subseteq g$ e $g \subseteq f$, si può vedere allora che le due frecce hanno i domini isomorfi e quindi diciamo che sono **sottoggetti isomorfi** e li indichiamo con il simbolo $f \simeq g$. Si può verificare che $\simeq$ è una relazione d'equivalenza e indichiamo con $Sub(d) := \{[f] \mid fmonicaconcodf = d\}$ la collezioni delle sue classi d'equivalenza. Identificando le classi con uno dei rappresentanti otteniamo che la relazione $\subseteq$ è anche antisimmetrica e quindi $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$ è un poset.

FATTORIZZAZIONE DELLE FRECCE Sia $\mathscr{C}$ una categoria con equalizzatore e pushout e sia $f \colon a \to b$ una sua freccia. Costruiamo il pushout di f con f e otteniamo le frecce $p \colon b \to r$ e $q \colon b \to r$. Indichiamo con $imf \colon f(a) \rightarrowtail b$ l'equalizzatore di p e q, che è monico perché ogni equalizzatore lo è. Siccome $q \circ f = p \circ f$, allora esiste un unica freccia $f^* \colon a \to f(a)$ tale che $f = imf \circ f^*$. La freccia imf viene chiamata freccia **immagine** e f^* freccia **ricoprimento**.

SOTTOQUOZIENTE Sia $\mathscr{C}$ una categoria e siano a e b due suoi oggetti. Si dice che a è un **sottoquoziente** di b se e solo se esiste un diagramma della forma

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & a \\
b &
\end{tikzcd}$$

CLASSIFICATORE DI SOTTOGETTI Se $\mathscr{C}$ è una categoria con oggetto terminale 1, allora un **classificatore di sottoggetti** per $\mathscr{C}$ è un oggetto Ω insieme con una freccia $true \colon 1 \to \Omega$ che soddisfa il seguente assioma:

Ω-AXIOM. Per ogni freccia monica $f \colon a \rightarrowtail d$ esiste una ed una sola freccia $\chi_f \colon d \to \Omega$ tale che $(true, \chi_f, f, !)$ è un quadrato pullback.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "true"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

La freccia χ_f è detta *freccia caratteristica* o *carattere* di f. La freccia *true* viene spesso indicata con il simbolo $\top$.

Un sottoggetto di Ω prende il nome di **valore di verità**.

Un classificatore di sottoggetti, quando esiste, è unico a meno di isomorfismi. Inoltre è possibile costruire un isomorfismo Sub(d)$\cong$ $Hom_{\mathscr{C}}(d, \Omega)$.

oggetto potenza Sia $\mathscr{C}$ una categoria e a un suo oggetto. Indichiamo con $\mathscr{P}(a)$ l'oggetto **potenza** di a insieme con il sottoggetto $\in_a \rightarrowtail \mathscr{P}(a) \times a$ se godono della seguente proprietà universale:

dato un oggetto b e un sottoggetto $r \rightarrowtail b \times a$ esiste un'unica freccia $f\colon b \to \mathscr{P}(a)$ tale che il seguente diagramma è un pullback. Se tale oggetto esiste, è unico a meno di isomorfismi.

$$\begin{tikzcd} r \arrow[r] \arrow[d, tail] & \in_a \arrow[d, tail] \\ b \times a \arrow[r, "f \times 1"] & \mathscr{P}(a) \end{tikzcd}$$

L'oggetto r può essere interpretato come una relazione e la freccia f viene chiamata il *nome* della relazione r.

6.3 funtori

Le categorie sono il nostro oggetto di studio ma, come spesso accade in matematica, una volta introdotta una struttura si definiscono le mappe che la conservano. Le categorie sono il dato costituito da una classe di oggetti e una classe di frecce quindi una mappa tra categorie deve agire su entrambe le classi in modo opportuno, preservando le "operazioni" e l'elemento neutro. Dopo queste osservazioni, nasce in maniera molto naturale la definizione di funtore.

Definizione 6.11

Un **funtore** $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una funzione che assegna a ogni $\mathscr{C}$-oggetto a, un $\mathscr{D}$-oggetto $F(a)$; ad ogni $\mathscr{C}$-freccia $f\colon a \to b$, una $\mathscr{D}$-freccia $F(f)\colon F(a) \to F(b)$ tale che $F(1_a) = 1_{F(a)}$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ogni volta che $g \circ f$ è definito.

Esempio 6.12.

1 Un primo esempio banale, ma allo stesso tempo molto importante, è quello di **funtore identità** $1_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ così definito: $1_{\mathscr{C}}(a) = a$ e $1_{\mathscr{C}}(f) = f$. La stessa regola permette di definire un **funtore inclusione** $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathscr{D}$ se $\mathscr{C}$ è una sottocategoria di $\mathscr{D}$.

2 Sia $\mathscr{C}$ una categoria i cui oggetti sono insiemi con particolari strutture (ad esempio gruppi, anelli, spazi topologici, ecc.) e le cui frecce sono i morfismi che le conservano. In questi casi possiamo definire il **funtore dimenticante** $U\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ "dimentica" la struttura degli oggetti di $\mathscr{C}$ e li trasforma in semplici insiemi così come le frecce che vengono interpretate come funzioni insiemistiche.

3 Il **funtore potenza** $\mathscr{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ porta ogni insieme A nel suo insieme potenza $\mathscr{P}(A)$ e ogni funzione $f\colon A \to B$ nella funzione $\mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ che assegna ad ogni insieme $X \subseteq A$ la sua immagine $f(X) \subseteq B$.

4 Consideriamo una categoria $\mathscr{C}$ e un $\mathscr{C}$-oggetto a, possiamo definire il funtore $Hom(a,-)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ che manda ogni oggetto b nell'insieme $Hom_{\mathscr{C}}(a,b)$ e associa ad ogni freccia $f\colon b \to c$ la funzione $Hom(a,f)\colon Hom_{\mathscr{C}}(a,b) \to Hom_{\mathscr{C}}(a,c)$ così definita: se l'input è g, l'output sarà $f \circ g$. Il funtore $Hom(a,-)$ è chiamato funtore **Hom** perché in alcuni contesti viene usata la parola omomorfisfmo (in inglese homomorphism) invece di freccia e $Hom_{\mathscr{C}}(a,b)$ è conosciuto col nome di *hom-set* . Naturalmente gli hom-set devono essere tutti *piccoli*, cioè insiemi, cosa non sempre vera (in generale sono delle classi).

Un funtore, per come l'abbiamo definito, più propriamente si chiama funtore **covariante** perché conserva la direzione delle frecce. Dualmente possiamo dare la definizione di funtore controvariante.

Definizione 6.13

Un funtore **controvariante** $f\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una funzione che assegna a ogni $\mathscr{C}$-oggetto a, un $\mathscr{D}$-oggetto $F(a)$; ad ogni $\mathscr{C}$-freccia $f\colon a \to b$, una $\mathscr{D}$-freccia $F(f)\colon F(b) \to F(a)$ tale che $F(1_a) = 1_{F(a)}$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ ogni volta che

$g \circ f$ è definito. Si dice che un funtore controvariante inverte le frecce.

Del funtore potenza e del funtore Hom se ne può dare la versione duale e quindi otteniamo due funtori controvarianti che indichiamo rispettivamente con $\overline{\mathscr{P}}$ e $Hom(-, a)$.

Dati due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{F}$, se ne può definire la composizione in maniera naturale e tale operazione risulta essere associativa.

Possiamo allora considerare la categoria di tutte le categorie, **Cat**, i cui oggetti sono appunto le categorie e le frecce sono i funtori. Questa categoria porta ad alcuni problemi fondazionali: **Set** non può essere un oggetto di **Cat** perché, come collezione di oggetti, è una classe propria e non può essere un elemento di un'altra collezione; inoltre **Cat**, essendo una categoria, dovrebbe essere un oggetto di **Cat** stesso ma questo ci porterebbe vicino al paradosso di Russel. Per evitare questi problemi consideriamo **Cat** come la categoria delle **categorie piccole**, cioè di quelle categorie per le quali la propria classe di frecce è un insieme.

Un funtore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ lavora su due categorie e manda oggetti e frecce dell'una in oggetti e frecce dell'altra. In ogni categoria però ci sono anche costruzioni particolari e ci chiediamo quando i funtori sono buoni, nel senso che rispettano le strutture sulle quali lavorano. A tale scopo diamo un po' di definizioni.

Definizione 6.14

Si dice che F **preserva** le frecce moniche se, per ogni f $\mathscr{C}$-freccia monica, $F(f)$ è una $\mathscr{D}$-freccia monica.

Si dice che F **riflette** le frecce moniche se vale l'implicazioni inversa, cioè: per ogni f $\mathscr{C}$-freccia, $F(f)$ monica $\Rightarrow f$ monica.

Analoghe definizioni valgono per frecce epiche e iso.

Sia D un diagramma in $\mathscr{C}$. $F(D)$ sarà allora un diagramma in $\mathscr{D}$ e si dice che *F preserva i D-limiti* se, per ogni $\{f_i\colon c \to d_i\}$ limite di D allora $\{F(f_i)\colon F(c) \to F(d_i)\}$ è un limite di $F(D)$.

F riflette i D-limiti se $\{F(f_i)\colon F(c) \to F(d_i)\}$ è un $F(D)$-limite allora $\{f_i\colon c \to d_i\}$ è un D-limite.

In generale se P è una proprietà categoriale, si dice che F *preserva* tale proprietà se vale l'implicazione: $P(x) \Rightarrow P(F(x))$, dove x può essere sia un oggetto che una freccia. Dualmente si dice che F *riflette* la proprietà P se vale l'implicazioni contraria.

F è **fedele** se, per ogni coppia di frecce $f, g\colon a \to b$ in $\mathscr{C}$ con lo stesso dominio e codominio, vale l'implicazione: $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$.

Proposizione 6.15. *$F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ con $\mathscr{E}$ categoria Cartesiana chiusa con classificatore di sottoggetti. F è fedele $\Leftrightarrow$ F riflette le frecce iso.*

Se f e g sono sottoggetti di d, allora, se F preserva le frecce moniche, $F(f)$ e $F(g)$ saranno sottoggetti di $F(d)$. F si dice **conservativo** se $F(f) \subseteq F(g) \Rightarrow f \subseteq g$.

Proposizione 6.16. *Sia $F\colon \mathscr{E} \to \mathscr{D}$ un funtore con $\mathscr{E}$ topos. Se F preserva gli equalizzatori e pullback allora sono equivalenti:*

1. *fedeltà;*
2. *conservatività;*
3. *preservazione iso.*

Definizione 6.17

Se F è un funtore che preserva tutti i limiti finiti, allora si dice **esatto a sinistra**. Se F preserva tutti i colimiti finiti si dice **esatto a destra**. Se F preserva sia i colimiti che i limiti finiti si dice **esatto**.

Proposizione 6.18. *Sia $\mathscr{C}$ una categoria finitamente completa, allora condizione necessaria e sufficiente per l'esattezza a sinistra di F è:*

- *F preserva oggetti terminali e pullback;*

oppure

- *F preserva oggetti terminali, equalizzatori e prodotti di coppie di $\mathscr{C}$-oggetti.*

6.4 TRASFORMAZIONI NATURALI

Nello studio di una teoria, una volta introdotti i morfismi, è importante dare la definizioni di isomorfismo o equivalenza tra gli oggetti della teoria in esame e abbiamo già sottolineato l'importanza che riveste l'equivalenza di topos per la loro interpretazioni come ponti tra le teorie. L'esperienza ci porta a considerare equivalenti due oggetti che sono legati da un morfismo biettivo, nel nostro caso, però, questa richiesta è troppo forte e allora si introduce il concetto di trasformazione naturale tra due funtori per darne una versione più debole.

Una trasformazione naturale è una mappa tra due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, ognuno di questi dà una diversa immagine di $\mathscr{C}$ su $\mathscr{D}$ e la trasformazione naturale porta l'immagine del primo sull'immagine del secondo.

Definizione 6.19

Una **trasformazione naturale** dal funtore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ al funtore $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una mappa $\tau\colon F \to G$ che assegna, per ogni $\mathscr{C}$-oggetto a, una $\mathscr{D}$-freccia $\tau_a\colon F(a) \to G(a)$ tale che per ogni $\mathscr{C}$-freccia $f\colon a \to b$ si ha che $\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$. Le frecce τ_a sono dette **componenti** della trasformazione τ.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] \\ b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(b) \arrow[r, "\tau_b"] & G(b) \end{tikzcd}$$

Se tutte le componenti τ_a sono frecce iso in $\mathscr{D}$, allora per ognuna possiamo considerare l'inversa τ_a^{-1} e queste saranno le componenti della trasformazione inversa $\tau^{-1}\colon G \to F$. In questo caso τ viene detto **isomorfismo naturale** e lo indichiamo con il simbolo $\tau\colon F \cong G$.

Un facile esempio di trasformazione naturale, che è anche un isomorfismo naturale, è $1_F\colon F \to F$ che assegna ad ogni oggetto a la freccia identità $1_{F(a)}\colon F(a) \to F(a)$.

Definizione 6.20

Un funtore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ si dice un'**equivalenza di categorie** se esiste un funtore $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tale che $\tau\colon 1_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$ e $\sigma\colon 1_{\mathscr{D}} \cong F \circ G$, con τ e σ isomorfismi naturali. Due categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono **equivalenti**, $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$, se e solo se esiste un funtore $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ che sia un equivalenza di categorie.

Con l'introduzione delle trasformazioni naturali possiamo definire la categoria $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ di tutti i funtori da $\mathscr{C}$ in $\mathscr{D}$ detta anche categoria **funtoriale**. Gli oggetti di questo questa categoria sono appunto i funtori mentre le frecce sono le trasformazioni naturali. Affinché questa sia una categoria dobbiamo definire un'operazione di composizione tra trasformazioni naturali in modo che la funzione composta sia ancora una trasformazione naturale. A questo scopo consideriamo F, G e H funtori e $\tau\colon F \to G$, $\sigma\colon G \to H$ trasformazioni naturali e poniamo $(\sigma \circ \tau)_a = \sigma_a \circ \tau_a$. Inoltre per ogni funtore F resta naturalmente associato la trasformazione identità 1_F che sarà la freccia identità di F vista come $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$-oggetto. E' di facile verifica che gli isomorfismi naturali sono esattamente le frecce iso in $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. Continueremo a parlare di questa categoria nel capitolo successivo.

6.5 aggiunzioni

Consideriamo due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e supponiamo che ad ogni $\mathscr{D}$-freccia $f\colon F(a) \to b$ sia abbinata un'unica $\mathscr{C}$-freccia $g\colon a \to G(b)$, con a $\mathscr{C}$-oggetto e b $\mathscr{D}$-

oggetto, nel senso che, per ogni coppia $\langle a, b\rangle$, abbiamo una biezione $\theta_{ab}\colon \mathscr{D}(F(a), b) \to \mathscr{C}(a, G(b))$ e possiamo costruire due funtori:

- $H\colon \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$, che ad ogni coppia $\langle a, b\rangle$ associa l'insieme $\mathscr{D}(F(a), b)$;
- $K\colon \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D} \to \mathbf{Set}$, che ad ogni coppia $\langle a, b\rangle$ associa l'insieme $\mathscr{C}(a, G(b))$.

Le biezioni θ_{ab} saranno allora le componenti di una trasformazione naturale $\theta\colon H \to K$.

Definizione 6.21

Se, dati due funtori $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ e $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, è possibile costruire l'isomorfismo θ, allora (F, G, θ) si dice un **aggiunzione** da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$. F è **aggiunto a sinistra** a G, $F \dashv G$, e G è **aggiunto a destra** a F, $G \vdash F$. Tutto viene indicato con il simbolo $\frac{a \to G(b)}{F(a) \to b}$.

Sia allora (F, G, θ) un'aggiunzione e a un $\mathscr{C}$-oggetto. Poniamo $b = F(a)$ e definiamo $\eta_a := \theta(1_{F(a)})$. Notiamo che data una freccia $g\colon a \to G(b)$, per l'aggiunzione esiste una sola freccia $f\colon F(a) \to b$ tale che il diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dr, "g"'] & G(F(a)) \arrow[d, dashed, "G(f)"] & F(a) \arrow[d, dashed, "f"] \\
& G(b) & b
\end{tikzcd} \quad (1)$$

La trasformazione η_a viene chiamata *unità* di a. Possiamo allora definire la trasformazione naturale $\eta\colon 1_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ detta **unità dell'aggiunzione**.

Analogamente se b è un $\mathscr{D}$-oggetto e poniamo $a = G(b)$ allora possiamo definire $\epsilon_b = \theta^{-1}(1_{G(b)})$, detta *co-unità* di b, e $\epsilon\colon F \circ G \to 1_{\mathscr{D}}$, **co-unità dell'aggiunzione.**

$$\begin{tikzcd}
F(G(b)) \arrow[r, "\epsilon_b"] & b & G(b) \\
F(a) \arrow[u, dashed, "F(g)"] \arrow[ur, "f"'] & & a \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd} \quad (2)$$

Notiamo che $\theta_{ab}(f) = G(f) \circ \eta_a$ e $\theta_{ab}^{-1}(g) = \epsilon_b \circ F(g)$. In effetti le precedenti proprietà caratterizzano un'aggiunzione, in altre parole sono equivalenti:

1. F è aggiunto a sinistra a G;

2. G è aggiunto a destra a F;
3. (F, G, θ) è un aggiunzione da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$;
4. esistono trasformazioni naturali $\eta \colon 1_{\mathscr{C}} \to G \circ F$ e $\epsilon \colon F \circ G \to 1_{\mathscr{D}}$ che hanno rispettivamente la proprietà (1) e (2).

Esempio 6.22. Sia $\mathscr{C}$ una categoria con pullback e sia $f \colon a \to b$ una freccia. Da questa freccia possiamo costruire due funtori.

Il **funtore pullback**: $f^* \colon \mathscr{C} \downarrow b \to \mathscr{C} \downarrow a$ la cui definizione si rappresenta bene con un diagramma.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, dashed, "f^*(k)"] \arrow[ddr, bend right, "f^*(g)"'] & & d \arrow[dr, "k"] \arrow[ddr, bend right, "g"] & \\
& m \arrow[rr] \arrow[d, "f^*(h)"'] & & n \arrow[d, "h"] \\
& a \arrow[rr, "f"] & & b
\end{tikzcd}$$

Il **funtore composto con f**: $\Sigma_f \colon \mathscr{C} \downarrow a \to \mathscr{C} \downarrow b$

Quest'ultimo è così definito: ad ogni oggetto $g \colon c \to a$ associa $f \circ g \colon c \to b$ e ad ogni freccia

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "g"'] & & d \arrow[dl, "h"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

associa la freccia

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & & d \arrow[dl, "f \circ h"] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

Presa una freccia $k\colon \Sigma_f(g) \to t$ in $\mathscr{C} \downarrow b$, ad essa corrisponde un'unica freccia $k'\colon g \to f^*(t)$ in $\mathscr{C} \downarrow a$ e quindi Σ_f è aggiunto a sinistra a f^*.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f \circ g"'] & & d \arrow[dl, "f \circ h"] \\
& b &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "k'"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& p \arrow[r] \arrow[d, "f^*(t)"'] & d \arrow[d, "t"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
$$

Teorema 6.23

Se (F, G, θ) è un'aggiunzione, allora l'aggiunto a sinistra F preserva tutti i colimiti di $\mathscr{C}$ e l'aggiunto a destra preserva tutti i limiti.

Quindi tutti i funtori F esatti a sinistra che hanno un aggiunto a destra, preservano tutti i limiti e tutti i colimiti e quindi sono esatti.

7

TEORIE DI LAWVERE

7.1 APPROCCIO CATEGORIALE ALL'ALGEBRA UNIVERSALE

Si introducono, in questa sezione, le nozioni necessarie per caratterizzare le varietà in termini del tutto categoriali. Si definiscono le presentazioni di varietà e le teorie di Lawvere con le rispettive categorie dei modelli.

Definizione 7.1

Una **presentazione di varietà** $(\mathscr{O}, X, T)$ è costituita da un insieme di simboli di operazione $\mathscr{O}$, da un insieme di variabili X e da un insieme di assiomi $T = \{t_i \approx s_i \mid i \in I\}$ dove i termini t_i ed s_i sono nelle variabili di X.

Data una presentazione di varietà $\mathbb{V} = (\mathscr{O}, X, T)$, possiamo considerare la varietà $\operatorname{Mod}(T)$, che indicheremo di seguito con $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$.

$\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ può essere dotata della struttura di categoria considerando come oggetti le algebre della varietà e come frecce gli omomorfismi tra le algebre di $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$.

Osserviamo che, data una presentazione di varietà $\mathbb{V}$, in $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ ci sono, in particolare, le algebre libere introdotte nel capitolo 5. Di seguito considereremo spesso le algebre libere F_n generate da un insieme di n generatori, con $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 7.2. *Sia $\mathbb{V}$ una presentazione di una varietà algebrica. Nella categoria dei modelli* $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$, *per ogni $n \in \mathbb{N}$, F_n è l'n-esima co-potenza di F_1.*

Dimostrazione. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $i \in \{1 \dots, n\}$, sia $F_1^{(i)}$ il sottoinsieme di F_n costituito dai termini che coinvolgono solo la variabile x_i. Allora $F_1^{(i)}$ è un $\mathbb{V}$-modello isomorfo a F_1 tramite l'isomorfismo h_i che estende l'applicazione che mappa $[x_1] \mapsto [x_i] \in F_1^{(i)}$. Consideriamo, per ogni $i \leq n$, la mappa di inclusione $\iota_i \colon F_1^{(i)} \to F_n$ (che è un $\mathbb{V}$-omomorfismo) e mostriamo che $(F_n, \iota_1, \dots, \iota_n)$ è il co-prodotto di $F_1^{(1)}, \dots, F_1^{(n)}$.

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[d, phantom, "\wr|"] & \cdots & F_1 \arrow[d, phantom, "\wr|"] \\
F_1^{(1)} \arrow[dr, "\iota_1"'] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & \cdots & F_1^{(n)} \arrow[dl, "\iota_n"] \arrow[ddl, bend left, "f_n"] \\
& F_n \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Sia $(M, \{f_i \colon F_1^{(i)} \to M\}_{i=1,\dots,n})$ un co-cono. Consideriamo l'applicazione che mappa $[x_i] \mapsto f_i[x_i]$ (che è ben definita perché M è un $\mathbb{V}$-modello); questa si estende univocamente a un $\mathbb{V}$-omomorfismo $f \colon F_n \to M$. Allora, per costruzione, si ha $f \circ \iota_i = f_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Inoltre l'applicazione f è l'unica che fa commutare il diagramma in figura perché, se $f \circ \iota_i = f_i$, deve valere necessariamente che $f([x_i]) = f_i([x_i])$. Allora F_n è l'n-esima co-potenza si F_1.

□

Osserviamo ora che le algebre libere si possono caratterizzare, utilizzando la teoria delle categorie, come mostrato di seguito.

Definizione 7.3

Fissata una presentazione di una varietà algebrica $\mathbb{V}$, definiamo:

- il **funtore dimenticante**

$$\begin{aligned} U \colon \operatorname{Mod} \mathbb{V} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ M &\longmapsto U(M) \\ (f \colon L \to M) &\longmapsto (Uf \colon U(L) \to U(M)) \end{aligned}$$

  dove $U(M)$ è l'insieme sottostante al modello M e Uf è il $\mathbb{V}$-omomorfismo f visto solo come funzione tra insiemi;

- il **funtore libero**

$$\begin{aligned} F \colon \mathscr{S} &\longrightarrow \operatorname{Mod} \mathbb{V} \\ I &\longmapsto F_I \\ (f \colon I \to J) &\longmapsto (Ff \colon F_I \to F_J) \end{aligned}$$

  dove F_I è il modello libero generato da $\{x_i \mid i \in I\}$ e Ff è l'omomorfismo che estende l'applicazione che associa $x_i \mapsto [x_{f(i)}]$.

Lemma 7.4. *Sia $\mathbb{V}$ una presentazione di varietà. Il funtore libero è l'aggiunto sinistro del funtore dimenticante.*

Dimostrazione. Vogliamo provare che c'è un isomorfismo naturale

$$\alpha \colon \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod} \mathbb{V}}(F_{-}, -) \Longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{S}}(-, U(-)).$$

Per ogni insieme I e per ogni $\mathbb{V}$-modello M, definiamo $\alpha_{I,M}\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}}(F_I, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(I, U(M))$ nel seguente modo. A ogni $\mathbb{V}$-omomorfismo $\varphi\colon F_I \to U(M)$ associamo la funzione $\alpha_{(I,M)}\varphi\colon I \to M$ definita da $\alpha_{(I,M)}\varphi(i) = \varphi([x_i])$ per ogni $i \in I$. Si noti che $\alpha_{(I,M)}$ è biettiva, perché ha come inversa la funzione che associa a $f\colon I \to M$ l'unico $\mathbb{V}$-omomorfismo da F_I in M che estende l'assegnazione $[x_i] \mapsto f(i)$ per ogni $i \in I$.

Controlliamo la naturalità di α. Siano, quindi, M e N due $\mathbb{V}$-modelli, I e J due insiemi, $\varphi\colon M \to N$ e $f\colon J \to I$. Consideriamo $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}}(F_I, M)$.

$$\begin{tikzcd}
\psi \arrow[rrr] \arrow[dddd] & & & \alpha_{I,M}\psi \arrow[ddd] \\
& {[F_I, M]} \arrow[r, "\alpha_{I,M}"] \arrow[d, "\varphi\circ - \circ Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {[I, U(M)]} \arrow[d, "U\varphi\circ - \circ f"] & \\
& {[F_J, N]} \arrow[r, "\alpha_{J,N}"'] & {[J, U(N)]} & \\
& & & U\varphi \circ \alpha_{I,M}\psi \circ f \arrow[d, equal] \\
\varphi \circ \psi \circ Ff \arrow[rrr] & & & \alpha_{J,N}(\varphi \circ \psi \circ Ff)
\end{tikzcd}$$

Per provare la naturalità si deve mostrare che $\alpha_{J,N}(\varphi \circ \psi \circ Ff) = U\varphi \circ \alpha_{I,M}\psi \circ f$. Sia quindi $j \in J$. Allora

$$\alpha_{J,N}(\varphi \circ \psi \circ Ff)(j) = (\varphi \circ \psi \circ Ff)([x_j]) = (\varphi \circ \psi)([x_{f(j)}])$$

mentre

$$(U\varphi \circ \alpha_{I,M}\psi \circ f)(j) = (U\varphi \circ \alpha_{I,M}\psi)(f(j)) = U\varphi(\psi([x_{f(j)}]) = (\varphi \circ \psi)([x_{f(j)}]). \qquad \square$$

Definizione 7.5

Una **teoria di Lawvere** $\mathscr{T}$ è una categoria costituita da un insieme numerabile di oggetti $\{T^0, T^1, \ldots, T^n, \ldots\}$ tali che T^n è l'n-esima potenza di T^1, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre un **modello** di $\mathscr{T}$ è un funtore $G\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ che preserva i prodotti finiti.

Di seguito, data una teoria di Lawvere $\mathscr{T}$, indicheremo con $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ la sua categoria dei modelli, ovvero la categoria che ha come oggetti i funtori da $\mathscr{T}$ a $\mathscr{S}$ che preservano i prodotti finiti e come morfismi le trasformazioni naturali tra di essi.

Lemma 7.6. *Ogni teoria di Lawvere ha i prodotti finiti.*

Dimostrazione. Consideriamo una teoria di Lawvere $\mathscr{T}$ con oggetti $\{T_0, T_1, \dots, T_n, \dots\}$ e proviamo che questa ha i prodotti finiti.

Siano $T^{k_1}, \dots, T^{k_m} \in \mathscr{T}$ e siano $s_0 := 0$, $s_i := \sum_{j=1}^{i} k_j$ per ogni $1 \le i \le m$ e $n := s_m$. Dato che $\mathscr{T}$ è una teoria di Lawvere, per ogni $1 \le i \le m$, T^{k_i} è la k_i-esima potenza di T^1; chiamiamo $\pi_i^{(1)}, \dots, \pi_i^{(k_i)}$ le proiezioni. Analogamente T^n è l'n-esima potenza di T^1; siano $\pi_1, \dots, \pi_n$ le proiezioni. Allora, per ogni $1 \le i \le m$, $(T^n, \pi_{s_{i-1}+1}, \dots, \pi_{s_i})$ è un cono sopra k_i copie di T^1, quindi, essendo T^{k_i} la k_i-esima potenza di T^1, esiste un unico morfismo $f_i \colon T^n \to T^{k_i}$ tale che $\pi_{s_{i-1}+h} = \pi_i^{(h)} \circ f_i$ per ogni $h = 1, \dots, k_i$. Mostriamo che $(T^n, f_1, \dots, f_m)$ è il prodotto di $T^{k_1}, \dots, T^{k_m}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & X \arrow[d, "g"] \arrow[ddlll, "g_1"'] \arrow[ddrrr, "g_m"] \arrow[dddllll, bend right, "l_1"'] \arrow[dddrrrr, bend left, "l_n"] & & & & \\
 & & & & T^n \arrow[dlll, "f_1"'] \arrow[drrr, "f_m"] \arrow[ddllll, bend right, "\pi_1"'] \arrow[ddrrrr, bend left, "\pi_n"] \arrow[ddll, "\pi_{k_1}"'] \arrow[ddrr, "\pi_{s_{m-1}+1}"] & & & & \\
 & T^{k_1} \arrow[dl, "\pi_1^{(1)}"'] \arrow[dr, "\pi_1^{(k_1)}"] & & & \cdots & & & T^{k_m} \arrow[dl, "\pi_m^{(1)}"'] \arrow[dr, "\pi_m^{(km)}"] & \\
T^1 & \cdots & T^1 & & \cdots & & T^1 & \cdots & T^1
\end{tikzcd}$$

Infatti considerato un cono $(X, g_1, \dots, g_m)$ sopra $T^{k_1}, \dots, T^{k_m}$, questo induce un cono $(X, \{l_{s_{i-1}+h} := \pi_i^{(h)} \circ g_i \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le h \le k_i\})$ sopra le n copie di T^1. Allora esiste un'unica applicazione $g \colon X \to T^n$ tale $\pi_j \circ g = l_j$ per ogni $1 \le j \le n$. Quindi otteniamo che per ogni $1 \le i \le m$ e per ogni $1 \le h \le k_i$ vale

$$\pi_i^{(h)} \circ f_i \circ g = \pi_{s_{i-1}+h} \circ g = l_{s_{i-1}+h} = \pi_h^{(k_i)} \circ g_i$$

Ma poiché per ogni $1 \le i \le m$, $(X, l_{s_{i-1}+1}, \dots, l_{s_i})$ è un cono sopra k_i copie di T^1, esiste un unico morfismo g_i tale che $l_{s_{i-1}+h} = \pi_i^{(h)} \circ g_i$, quindi deve valere $f_i \circ g = g_i$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 7.7. *Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere e $G \colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un funtore. Se G preserva le potenze, allora preserva anche i prodotti finiti, cioè G è un modello.*

Dimostrazione. Conservando la stessa notazione del lemma precedente, consideriamo T^n, prodotto di $T^{k_1}, \dots, T^{k_m}$. Sia $M := G(T^1)$, allora $G(T^{k_i}) = M^{k_i}$ per ogni $i \le m$ e $G(T^n) = M^n$. Chiamiamo $q_i^{(1)}, \dots, q_i^{(k_i)}$ le proiezioni di M^{k_i} sulle k_i copie di M e $q_1, \dots, q_n$ le proiezioni di M^n.

Per ipotesi vale $G(\pi_i^{(h)}) = q_i^{(h)}$ per ogni $1 \leq i \leq m$, $1 \leq h \leq k_i$ e $G(\pi_j) = q_j$ per ogni $1 \leq j \leq n$.

Mostriamo che le proiezioni $f_1, \ldots, f_m$ di T^n su $T^{k_1}, \ldots, T^{k_m}$ sono mandate da G nelle proiezioni di M^n su $M^{k_1}, \ldots, M^{k_m}$ che chiameremo $p_1, \ldots, p_m$. Infatti, per ogni $1 \leq i \leq m$, $1 \leq h \leq k_i$, si ha

$$q_{s_{i-1}+h} = G(\pi_{s_{i-1}+h}) = G(\pi_i^{(h)} \circ f_i) = G(\pi_i^{(h)}) \circ G(f_i) = q_i^{(h)} \circ G(f_i)$$

cioè $G(f_i) = p_i$. $\square$

7.2 PRESENTAZIONI DI VARIETÀ E TEORIE DI LAWVERE

Al fine di caratterizzare le varietà utilizzando le teorie di Lawvere, mostriamo che si possono definire delle corrispondenze $\mathscr{L}$ e $\mathscr{P}$ che permettono di passare rispettivamente dalle presentazioni di varietà alle teorie di Lawvere e viceversa. Proviamo, inoltre, che applicando queste corrispondenze a una presentazione di varietà (rispettivamente a una teoria di Lawvere) la categoria dei modelli della teoria di Lawvere ottenuta (rispettivamente della presentazione di varietà) è equivalente alla categoria dei modelli di partenza.

$$\mathbb{V} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(\mathbb{V}) \qquad\qquad \mathscr{T} \xrightarrow{\mathscr{P}} \mathscr{P}(\mathscr{T})$$

$$\mathrm{Mod}\,\mathbb{V} \simeq [\mathscr{L}(\mathbb{V}), \mathscr{S}]_\Pi \qquad\qquad [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \simeq \mathrm{Mod}\,\mathscr{P}(\mathscr{T})$$

7.3 DALLE PRESENTAZIONI DI VARIETÀ ALLE TEORIE DI LAWVERE

Definizione 7.8

Definiamo un'assegnazione $\mathscr{L}$ che associa a ogni presentazione di una varietà $\mathbb{V}$ una teoria di Lawvere $\mathscr{L}(\mathbb{V}) := \mathcal{F}_V{}^{\mathrm{op}}$, dove con $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ si indica la sottocategoria piena di $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ generata dai modelli liberi $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Si noti che $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ è una teoria di Lawvere, infatti, per il lemma 7.2 , nella categoria $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$, F_n è l'n-esima co-potenza di F_1. Dunque, in $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}{}^{\mathrm{op}}$, F_n è l'n-esima potenza di F_1, cioè $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}{}^{\mathrm{op}}$ è una teoria di Lawvere.

Proposizione 7.9. *Sia $\mathbb{V}$ una presentazione di varietà. Allora*

$$\mathrm{Mod}\,\mathbb{V} \simeq [\mathscr{L}(\mathbb{V}), \mathscr{S}]_\Pi.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mathscr{L}(\mathbb{V}) = \mathcal{F}_{\mathbb{V}}{}^{\mathrm{op}}$. Denotiamo, inoltre, con $[\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$ la categoria dei funtori controvarianti da $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ in $\mathscr{S}$ che mandano co-prodotti finiti in prodotti finiti. La tesi è equivalente a provare che

$$\mathrm{Mod}\,\mathbb{V} \simeq [\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}.$$

Per provare l'equivalenza di categorie, definiamo il funtore

$$H\colon \mathrm{Mod}\,\mathbb{V} \longrightarrow [\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$$

come segue. Se $M \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$, allora $G := HM\colon \mathcal{F}_{\mathbb{V}} \to \mathscr{S}$ è definito come segue:

$$G(F_n) := M^n$$

e se $f\colon F_n \to F_m$, allora $Gf\colon M^m \to M^n$ è il morfismo che agisce come spiegato di seguito. Detti $t_1, \ldots, t_n$ i termini m-ari tali che $f([x_i]) = [t_i]$ per ogni $1 \leq i \leq n$ e presi $a_1, \ldots, a_m \in M$,

$$Gf(a_1, \ldots, a_m) = (t_1^M(a_1, \ldots, a_m), \ldots, t_n^M(a_1, \ldots, a_m)) \in M^n.$$

G così definito è banalmente un funtore, infatti

$$Gid_{F_n}(a_1, \ldots, a_m) = (x_1^M(a_1, \ldots, a_n), \ldots, x_n^M(a_1, \ldots, a_n)) = (a_1, \ldots, a_n) = id_{M^n}$$

inoltre, se $g\colon F_n \to F_m$ con $g([x_i]) = t_i$ per $1 \leq i \leq n$ e $f\colon F_m \to F_k$ con $f([x_i]) = s_i$ per $1 \leq i \leq m$, presi $a_1, \ldots, a_k \in M$, si ha

$$\begin{aligned}
&G(f \circ g)(a_1, \ldots, a_k) = (t_1[s_1, \ldots, s_m]^M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, t_n[s_1, \ldots, s_m]^M(a_1, \ldots, a_k)) = \\
&= (t_1^M(s_1^M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, s_m^M(a_1, \ldots, a_k)), \ldots, t_n^M(s_1^M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, s_m^M(a_1, \ldots, a_k))) = \\
&= Gg(s_1^M(a_1, \ldots, a_k), \ldots, s_m^M(a_1, \ldots, a_k)) = \\
&= Gg \circ Gf(a_1, \ldots, a_k).
\end{aligned}$$

Notiamo anche che G manda i co-prodotti finiti in prodotti finiti. Per il corollario 7.7 basta controllare che G mandi le co-potenze in potenze. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $G(F_n) = M^n$ per definizione di G. Inoltre, dette $\iota_1, \ldots, \iota_n$ le co-proiezioni, si ha $\iota([x_i]) = [x_i]$ per ogni $i \leq n$, quindi

$$G\iota_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i = \pi_i(a_1, \ldots, a_n)$$

dove π_i è l'i-esima proiezione di M^n su M. Quindi $G \in [\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$.

Vediamo ora come agisce H sui morfismi. Siano $L, M \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $f\colon L \to M$ un $\mathbb{V}$-omomorfismo di modelli. Vogliamo definire la trasformazione naturale $Hf\colon HL \Rightarrow HM$. Chiamiamo $\alpha := Hf$, dobbiamo definire una famiglia di morfismi $\{\alpha_n\colon HL(F_n) \to HM(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, cioè

$$\{\alpha_n\colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Presi $l_1, \dots, l_n \in L$, poniamo $\alpha_n(l_1, \dots, l_n) = (f(l_1), \dots, f(l_n))$ e proviamo che α è una trasformazione naturale. Consideriamo quindi $n, m \in \mathbb{N}$ e $g\colon F_n \to F_m$, chiamiamo inoltre $g([x_i]) = t_i$ per ogni $1 \le i \le n$.

$$\begin{tikzcd}
(t_1^L(l_1,\dots,l_m),\dots,t_n^L(l_1,\dots,l_m)) \arrow[rrr] & & & (f(t_1^L(l_1,\dots,l_m)),\dots,f(t_n^L(l_1,\dots,l_m))) \arrow[d, equal] \\
& & & (t_1^M(f(l_1),\dots,f(l_m)),\dots,t_n^M(f(l_1),\dots,f(l_m))) \\
& L^n \arrow[r, "\alpha_n"] & M^n & \\
& L^m \arrow[u, "HL(g)"] \arrow[r, "\alpha_m"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & M^m \arrow[u, "HM(g)"'] & \\
(l_1,\dots,l_m) \arrow[uuuu] \arrow[rrr] & & & (f(l_1),\dots,f(l_m)) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

Per la naturalità è necessario provare che

$$f(t_i^L(l_1, \dots, l_m)) = t_i^M(f(l_1), \dots, f(l_m)) \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

ma questo è vero perché f è un $\mathbb{V}$-omomorfismo. Notiamo che banalmente $H(id_L) = id$ e che se $g\colon L \to M$, $f\colon M \to N$, allora $H(f \circ g) = Hf \circ Hg$, ovvero H è un funtore.

Per provare l'equivalenza tra $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $[\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$, mostriamo che il funtore H è pieno, fedele ed essenzialmente suriettivo.

<u>ESSENZIALMENTE SURIETTIVO</u> Sia $G \in [\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$. Consideriamo il $\mathbb{V}$-modello $M := G(F_1)$ con la seguente interpretazione dei termini. Se t è un termine n-ario, questo induce una funzione $\bar{t}\colon F_1 \to F_n$ che mappa $[x_1] \mapsto [t]$, da cui si ottiene un morfismo $G(\underline{t})\colon G(F_n) \to G(F_1)$, dove $G(F_1) = M$ e $G(F_n) = G(F_1)^n = M^n$ perché G mappa i co-prodotti in prodotti. Allora, se $a_1, \dots, a_n \in M$, poniamo $t^M(a_1, \dots, a_n) = G(\underline{t})$. Si noti che in M valgono gli assiomi della presentazione di varietà $\mathbb{V}$, perché se $t \approx s$ allora $[t] = [s]$, quindi $t^M = s^M$.

Proviamo che $HM \cong G$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $HM(F_n) = M^n = G(F_n)$, mentre se $f\colon F_n \to F_m$ con $f([x_i]) = [t_i]$, presi $a_1, \dots, a_m \in M$, si ha

$$\begin{aligned}
HM(f)(a_1, \dots, a_m) &= (t_1^M(a_1, \dots, a_m), \dots, t_n^M(a_1, \dots, a_m)) = \\
&= (G\overline{t_1}(a_1, \dots, a_m), \dots, G\overline{t_n}(a_1, \dots, a_m)) = \\
&= Gf(a_1, \dots, a_m).
\end{aligned}$$

Quindi, in particolare, $HM = G$.

<u>PIENO</u> Siano $L, M \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $\alpha\colon HL \Rightarrow HM$. Vogliamo dimostrare che esiste un $\mathbb{V}$-omomorfismo $\varphi\colon L \to M$ tale che $H\varphi = \alpha$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, notiamo che, detta $\iota_i \colon F_1 \to F_n$ l'i-esima co-proiezione, dalla naturalità di α segue che, presi $l_1, \dots, l_n \in L$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ HL(\iota_i)(l_1, \dots, l_n) = HL(\iota_i) \circ \alpha_n(l_1, \dots, l_n) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha_1(l_i) = \pi_i(\alpha_n(l_1, \dots, l_n)) \end{aligned}$$

dove π_i è l'i-esima proiezione di M^n su M per $1 \leq i \leq n$. Quindi

$$(\alpha_1(l_1), \dots, \alpha_n(l_n)) = \alpha_n(l_1, \dots, l_n).$$

Prendiamo ora $\varphi := \alpha_1 \colon M \to L$. φ è un $\mathbb{V}$-omomorfismo, infatti, presa un'operazione n-aria f, questa induce una $\overline{f} \colon F_1 \to F_n$. Allora per la naturalità di α:

$$\begin{tikzcd}
f^L(l_1, \dots, l_n) \arrow[rrr] & & & \alpha_1(f^L(l_1, \dots, l_n)) \arrow[d, equal] \\
& & & f^M(\alpha_n(l_1, \dots, l_n)) \\
& L \arrow[r, "\alpha_1"] & M & \\
& L^n \arrow[u, "HL(\overline{f})"] \arrow[r, "\alpha_n"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & M^n \arrow[u, "HM(\overline{f})"'] & \\
(l_1, \dots, l_n) \arrow[uuuu] \arrow[rrr] & & & \alpha_n(l_1, \dots, l_n) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_1(f^L(l_1, \dots, l_n)) = f^M(\alpha_n(l_1, \dots, l_n)) = f^M(\alpha_1(l_1), \dots, \alpha_1(l_n))$$

ovvero α_1 è un $\mathbb{V}$-omomorfismo.
Inoltre $H\alpha_1 \colon HL \Rightarrow HM$ è una famiglia $\{H\alpha_1^{(n)} \colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dove

$$H\alpha_1^{(n)}(l_1, \dots, l_n) = (\alpha_1(l_1), \dots, \alpha_1(l_n)) = \alpha_n(l_1, \dots, l_n)$$

quindi $H\alpha_1 = \alpha$.

FEDELE Siano $L, M \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}$ e $f, g \colon L \to M$, supponiamo $Hf = Hg$ e proviamo che $f = g$. Se $Hf = \{Hf_n \colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $Hg = \{Hg_1 \colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abbiamo che, per ogni $l \in L$,

$$f(l) = Hf_1(l) = Hg_1(l) = g(l)$$

da cui $f = g$.

In conclusione abbiamo ottenuto che $\operatorname{Mod} \mathbb{V} \simeq [\mathcal{F}_{\mathbb{V}}, \mathscr{S}]^*_{\Pi}$. $\square$

7.4 DALLE TEORIE DI LAWVERE ALLE PRESENTAZIONI DI VARIETÀ

Definizione 7.10

Definiamo un'assegnazione $\mathscr{P}$ che associa a ogni teoria di Lawvere una presentazione di varietà:

$$\mathscr{P} \colon \mathscr{T} \longmapsto \mathscr{P}(\mathscr{T})$$

dove $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ è definita come segue.

Detti $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gli oggetti di $\mathscr{T}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo come simboli di operazione n-aria in $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ i morfismi da T^n in T^1, in modo che le proiezioni $\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_n^{(n)}$ di T^n in T^1 corrispondano alle operazioni di proiezione n-aria $p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)}$ nella varietà. In particolare, per $n = 1$, consideriamo come proiezione di T^1 su T^1 l'identità id_{T^1}.

Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$, detto $\mathscr{O}_n$ l'insieme dei simboli di operazione n-aria di $\mathscr{P}(\mathscr{T})$, poniamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{O}_n &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T^n, T^1) \\
p_i^n &= \pi_i^{(n)} \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n \\
\pi_1^1 &= id_{T^1}.
\end{aligned}$$

Inoltre per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $g \in \mathscr{O}_n$ e $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{O}_m$, poniamo come assioma della varietà

$$g[f_1, \dots, f_n] \approx g \circ f$$

dove f è l'unico morfismo che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & T^m \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_n"] & \\
 & T^n \arrow[dl, "\pi_1^{(n)}"'] \arrow[dr, "\pi_n^{(n)}"] \arrow[dd, "g"] & \\
T^1 & \cdots & T^1 \\
 & T^1 &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 7.11. Con questa definizione, per ogni algebra $A \in \mathrm{Mod}\, \mathscr{P}(\mathscr{T})$, l'insieme delle operazioni fondamentali di A è un clone. Infatti contiene le proiezioni ed è chiuso per composizione generalizzata. In altre parole, abbiamo costruito la presentazione di varietà $\mathscr{P}(\mathscr{T})$ prendendo un simbolo di operazione per ogni possibile termine.

Proposizione 7.12. *Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere. Allora*

$$\operatorname{Mod}\mathscr{P}(\mathscr{T}) \simeq [\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbb{V} := \mathscr{P}(\mathscr{T})$ e siano $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gli oggetti di $\mathscr{T}$.

Proviamo che

$$\operatorname{Mod}\mathbb{V} \simeq [\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi.$$

Definiamo il funtore $H\colon \operatorname{Mod}\mathbb{V} \to [\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi$. Per ogni modello $M \in \operatorname{Mod}\mathbb{V}$, sia $G := HM$ definito da:

$$\begin{aligned} G\colon \mathscr{T} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ T^n &\longmapsto M^n \\ f\colon T^n \to T^m &\longmapsto Gf\colon M^n \to M^m \end{aligned}$$

dove, se $m_1,\dots,m_n \in M$,

$$Gf(m_1,\dots,m_n) = ((\pi_1^{(m)} \circ f)^M(m_1,\dots,m_n),\dots,(\pi_m^{(m)} \circ f)^M(m_1,\dots,m_n)).$$

Si noti G preserva le potenze, infatti $G(T^n) = M^n$ e

$$G\pi_i^{(n)} = (\pi_1^{(1)} \circ \pi_i^{(n)})^M = (id_{T^1} \circ \pi_i^{(n)})^M = (p_i^{(n)})^M$$

allora per il corollario 7.7 G preserva i prodotti finiti, quindi $G \in [\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi$.

Vediamo come agisce H sui morfismi. Siano $L, M \in \operatorname{Mod}\mathbb{V}$ e $f\colon L \to M$ un omomorfismo di modelli. Definiamo $Hf\colon HL \Rightarrow HM$, cioè la famiglia $\{HF_n\colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$Hf_n(l_1,\dots,l_n) = (f(l_1),\dots,f(l_n))$$

per ogni $l_1,\dots,l_n \in L$. Per verificare che Hf è naturale si consideri $n, m \in \mathbb{N}$ e $g\colon T^n \to T^m$, allora per ogni $1 \le i \le n$ e per ogni $l_1,\dots,l_n \in L$,

$$(\pi_i^m \circ g)^M(f(l_1),\dots,f(l_n)) = f((\pi_i^{(m)} \circ g)^L(l_1,\dots,l_n))$$

in quanto f è un omomorfismo. Quindi il seguente diagramma commuta, ovvero Hf è una trasformazione naturale.

$$
\begin{tikzcd}
(l_1,\dots,l_n) \arrow[rrr] \arrow[dddd] & & & (f(l_1),\dots,f(l_n)) \arrow[ddd] \\
& L^n \arrow[r, "Hf_n"] \arrow[d, "HL(g)"'] & M^n \arrow[d, "HM(g)"] & \\
& L^m \arrow[r, "Hf_m"'] & M^m & \\
& & & ((\pi_1^{(m)}\circ g)^M(f(l_1),\dots,f(l_n)),\dots,(\pi_m^{(m)}\circ g)^M(f(l_1),\dots,f(l_n))) \arrow[d, equal] \\
((\pi_1^{(m)}\circ g)^L(l_1,\dots,l_n),\dots,(\pi_m^{(m)}\circ g)^L(l_1,\dots,l_n)) \arrow[rrr] & & & (f((\pi_1^{(m)}\circ g)^L(l_1,\dots,l_n)),\dots,f((\pi_m^{(m)}\circ g)^L(l_1,\dots,l_n)))
\end{tikzcd}
$$

Si noti inoltre che, banalmente $H(id_L) = id$ e, se $g\colon L \to M$ e $f\colon M \to N$, allora $H(f \circ g) = Hf \circ Hg$, cioè H è un funtore.

Per provare che $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V} \simeq [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$, mostriamo ora che H è essenzialmente suriettivo, pieno e fedele.

essenzialmente suriettivo Sia $G \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$. Consideriamo $M := G(T^1)$, quindi dato che G preserva i prodotti finiti, $M^n = G(T^1)^n = G(T^n)$. M può essere dotato della struttura di $\mathbb{V}$-modello interpretando un termine n-ario t (quindi il simbolo di funzione corrispondente $t\colon T^n \to T^1$) in $t^M := Gt\colon M^n \to M$. In questo modo M soddisfa gli assiomi di $\mathbb{V}$, infatti se $g \in \mathscr{O}_n$ e $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{O}_m$, allora, detto $f\colon T^m \to T^n$ l'unico morfismo tale che $f_i = \pi_i^{(n)} \circ f$ per ogni $1 \le i \le n$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
g[f_1,\dots,f_n]^M(a_1,\dots,a_m) &= g^M(f_1^M(a_1,\dots,a_m),\dots,f_n^M(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= g^M(Gf_1(a_1,\dots,a_m),\dots,Gf_n(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= g^M(G(\pi_1^{(n)}\circ f)(a_1,\dots,a_m),\dots,G(\pi_n^{(n)}\circ f)(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= g^M((G\pi_1^{(n)}\circ Gf)(a_1,\dots,a_m),\dots,(G\pi_n^{(n)}\circ Gf)(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= g^M((\pi_1^{(n)})^M(f^M(a_1,\dots,a_m)),\dots,(\pi_n^{(n)})^M(f^M(a_1,\dots,a_m))) = \\
&= g^M(f^M(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= (g\circ f)^M(a_1,\dots,a_m).
\end{aligned}
$$

Quindi in M vale l'assioma $g[f_1, \dots, f_n] \approx g \circ f$, da cui si ottiene che M è un $\mathbb{V}$-modello.

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $HM(T^n) = M^n = G(T^n)$ e per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, $f\colon T^n \to T^m$, presi $a_1, \dots, a_n \in M$, si ha

$$\begin{aligned}
HM(f)(a_1,\dots,a_n) &= ((\pi_1^{(m)} \circ f)^M(a_1,\dots,a_m),\dots,(\pi_m^{(m)} \circ f)^M(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= (G(\pi_1^{(m)} \circ f)(a_1,\dots,a_m),\dots,G(\pi_m^{(m)} \circ f)(a_1,\dots,a_m)) = \\
&= (\pi_1^{(m)}(Gf(a_1,\dots,a_n)),\dots,\pi_m^{(m)}(Gf(a_1,\dots,a_n))) = \\
&= Gf(a_1,\dots,a_n).
\end{aligned}$$

Dunque $HM = G$.

PIENO Siano $L, M \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $\alpha\colon HL \Rightarrow HM$. Proviamo che esiste un $\mathbb{V}$-omomorfismo $\varphi\colon L \to M$ tale che $H\varphi = \alpha$.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, notiamo che, detta $\pi_i^{(n)}\colon T^n \to T^1$ l'i-esima proiezione, dalla naturalità di α segue che, presi $l_1,\dots,l_n \in L$,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \circ HL(\pi_i^{(n)})(l_1,\dots,l_n) = HL(\pi_i^{(n)}) \circ \alpha_n(l_1,\dots,l_n) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \alpha_1(l_i) = (\pi_i^{(n)})^M(\alpha_n(l_1,\dots,l_n)).
\end{aligned}$$

Quindi

$$(\alpha_1(l_1),\dots,\alpha_n(l_n)) = \alpha_n(l_1,\dots,l_n).$$

Prendiamo ora $\varphi := \alpha_1\colon M \to L$. φ è un $\mathbb{V}$-omomorfismo, infatti, presa un'operazione n-aria $f\colon T^n \to T^1$, per la naturalità di α si ha:

$$\begin{tikzcd}
f^L(l_1,\dots,l_n) \arrow[rrr] & & & \alpha_1(f^L(l_1,\dots,l_n)) \\
(\pi_1^{(1)} \circ f)^L(l_1,\dots,l_n) \arrow[u, equal] & & & f^M(\alpha_n(l_1,\dots,l_n)) \arrow[u, equal] \\
& L \arrow[r, "\alpha_1"] & M & \\
& L^n \arrow[u, "HL(f)"] \arrow[r, "\alpha_n"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & M^n \arrow[u, "HM(f)"'] & \\
(l_1,\dots,l_n) \arrow[uuu] \arrow[rrr] & & & \alpha_n(l_1,\dots,l_n) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

Dunque

$$\alpha_1(f^L(l_1,\dots,l_n)) = f^M(\alpha_n(l_1,\dots,l_n)) = f^M(\alpha_1(l_1),\dots,\alpha_1(l_n))$$

ovvero α_1 è un $\mathbb{V}$-omomorfismo.

Inoltre $H\alpha_1\colon HL \Rightarrow HM$ è una famiglia $\{H\alpha_1^{(n)}\colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dove

$$H\alpha_1^{(n)}(l_1, \dots, l_n) = (\alpha_1(l_1), \dots, \alpha_1(l_n)) = \alpha_n(l_1, \dots, l_n)$$

quindi $H\alpha_1 = H\varphi = \alpha$.

FEDELE Siano $L, M \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}$ e $f, g\colon L \to M$, supponiamo $Hf = Hg$ e proviamo che $f = g$. Se $Hf = \{Hf_n\colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $Hg = \{Hg_1\colon L^n \to M^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abbiamo che, per ogni $l \in L$,

$$f(l) = Hf_1(l) = Hg_1(l) = g(l)$$

da cui $f = g$.

In conclusione $\operatorname{Mod} \mathscr{P}(\mathscr{T}) \simeq [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$. $\square$

A

ARGOMENTI AVANZATI

A.1 ISOMORFISMI DI TEORIE DI LAWVERE E TERM-EQUIVALENCE

Le proposizioni 7.9 e 7.12 provano che, considerata una presentazione di varietà, si può costruire una teoria di Lawvere in modo che la categoria dei modelli in senso algebrico della varietà sia equivalente alla categoria dei modelli della teoria di Lawvere corrispondente e viceversa.

Come prossimo passo, vogliamo provare che, detta $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere, $\mathscr{L}(\mathscr{P}(\mathscr{T}))$ e $\mathscr{T}$ sono isomorfe e che, detta $\mathbb{V}$ una presentazione di varietà, le varietà corrispondenti a $\mathbb{V}$ e a $\mathscr{P}(\mathscr{L}(\mathbb{V}))$, cioè $\operatorname{Mod}\mathscr{P}(\mathscr{L}(\mathbb{V}))$ e $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$, sono term-equivalent.

Specifichiamo, prima di tutto, cosa si intende per isomorfismo di teorie di Lawvere.

Definizione A.1

Consideriamo due teorie di Lawvere $\mathscr{R}$ e $\mathscr{T}$, con oggetti rispettivamente R^0, R^1, $\dots$, R^n, $\dots$ e T^0, T^1, $\dots$, T^n, $\dots$. Un **morfismo** di teorie di Lawvere è un funtore $F\colon \mathscr{R} \to \mathscr{T}$ che preserva i prodotti finiti e che mappa R^n in T^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Un **isomorfismo** di teorie di Lawvere è un morfismo di teorie di Lawvere che ha un inverso.

Notiamo che, tramite l'equivalenza tra le categorie dei modelli in senso algebrico e in senso categoriale, possiamo considerare i modelli liberi di una varietà, definiti attraverso l'algebra universale, come funtori dalla teoria di Lawvere corrispondente in $\mathscr{S}$ che preservano i prodotti finiti, ovvero come modelli in senso categoriale.

Definiamo un funtore dimenticante dalla categoria dei modelli di una teoria di Lawvere.

Definizione A.2

Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere con $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ oggetti di $\mathscr{T}$. Allora chiameremo **funtore dimenticante** il funtore

$$\begin{aligned} U\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi &\longrightarrow \mathscr{S} \\ F &\longmapsto F(T_1) \\ (\alpha\colon F \Rightarrow G) &\longmapsto (\alpha_1\colon F(T_1) \to G(T_1)). \end{aligned}$$

Proposizione A.3. *Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere e $\mathbb{V} = \mathscr{P}(\mathscr{T})$. Siano $H\colon \operatorname{Mod}\mathbb{V} \to [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ e $K\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \to \operatorname{Mod}\mathbb{V}$ i funtori che formano l'equivalenza di categorie tra $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ e $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ costruita nella proposizione 7.12. Sia inoltre $U'\colon \operatorname{Mod}\mathbb{V} \to \mathscr{S}$ il funtore dimenticante definito nel lemma 7.4. Allora $U' \simeq U \circ H$ e $U' \circ K \simeq U$, cioè l'equivalenza di categorie H, K preserva il funtore dimenticante.*

Dimostrazione. Proviamo che $U' \simeq U \circ H$. Sia $M \in \operatorname{Mod}\mathbb{V}$. Allora per la proposizione 7.12 il funtore HM è tale che $HM(T^n) = M^n$, da cui

$$U \circ H(M) = U(H(M)) = HM(T_1) = M = U'(M).$$

Inoltre se $f\colon L \to M$ è un $\mathscr{T}$-omomorfismo di modelli, $Hf\colon HL \Rightarrow HM$ è definito da

$$\begin{aligned} Hf_n\colon L^n &\longrightarrow M^n \\ (l_1, \ldots, l_n) &\longmapsto (f(l_1), \ldots, f(l_n)) \end{aligned}$$

Quindi

$$U \circ H(f) = U(Hf) = Hf_1 = Uf$$

cioè $U' = U \circ H \Rightarrow U' \simeq U \circ H$. Inoltre

$$U' \simeq U \circ H \Rightarrow U' \circ K \simeq U \circ H \circ K \simeq U \circ id_{[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi} \simeq U$$

da cui la tesi. □

Osservazione A.4. Analogamente, si prova che se $\mathbb{V}$ è una presentazione di varietà e $\mathscr{T} = \mathscr{L}(\mathbb{V})$, allora l'equivalenza di categorie tra $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ e $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ costruita nella proposizione 7.9 preserva il funtore dimenticante.

Osservazione A.5. Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere e $\mathbb{V} = \mathscr{P}(\mathscr{T})$ con $H\colon \operatorname{Mod}\mathbb{V} \to [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ e $K\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}] \to \operatorname{Mod}\mathbb{V}$ equivalenza di categorie tra $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ e $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ costruita nella proposizione 7.12. Siano inoltre $U'\colon \operatorname{Mod}\mathbb{V} \to \mathscr{S}$ ed $F'\colon \mathscr{S} \to \operatorname{Mod}\mathbb{V}$ rispettivamente il funtore dimenticante e il funtore libero. Allora per l'osservazione precedente e per l'osservazione **??** il funtore libero $F = H \circ F'$ è aggiunto sinistro del funtore dimenticante U.

Quindi nella categoria dei modelli di una teoria di Lawvere, possiamo sempre considerare i modelli liberi $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ come le immagini degli insiemi con n elementi tramite il funtore libero.

Di seguito, data una teoria di Lawvere $\mathscr{T}$, indicheremo con $\mathcal{F}_\mathscr{T}$ la sottocategoria piena di $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ generata dai modelli liberi $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Proposizione A.6. *Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere. Allora $\mathscr{T}^{op}$ e $\mathcal{F}_{\mathscr{T}}$ sono categorie isomorfe.*

Dimostrazione. Per il lemma di Yoneda il funtore $T^n \in \mathscr{T}^{op} \mapsto [T^n, -] \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]$ è pieno e fedele, ovvero $\mathscr{T}^{op}$ si immerge in $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]$. Inoltre, per la proposizione **??**, $[T^n, -]$ preserva i limiti, quindi $\mathscr{T}^{op}$ si immerge in $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi}$. Allora, per provare che $\mathscr{T}^{op} \simeq \mathcal{F}_{\mathscr{T}}$, mostriamo che c'è un isomorfismo tra $[T^n, -]$ e F_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per l'immersione di Yoneda basta dimostrare che $[[T^n, -], -] \simeq [F_n, -]$. Ma, se $G \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi}$, ancora per Yoneda, $[[T^n, -], G] \simeq G(T^n)$, quindi

$$
\begin{aligned}
[[T^n, -], G] \simeq G(T^n) \simeq (G(T^1))^n \simeq [\{1, \dots, n\}, G(T^1)] \simeq \\
\simeq [\{1, \dots, n\}, U(G)] \simeq [F_n, G]
\end{aligned}
$$

da cui la tesi. □

Corollario A.7. *Siano $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ categorie di Lawvere. Se esiste un'equivalenza di categorie tra $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi}$ e $[\mathscr{T}', \mathscr{S}]_{\Pi}$ che preserva i funtori dimenticanti, allora $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ sono teorie di Lawvere isomorfe.*

Dimostrazione. Sia $H\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi} \to [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_{\Pi}$, $K\colon [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_{\Pi} \to [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi}$ equivalenza di categorie. Dato che H, K preservano i funtori dimenticanti, per l'osservazione **??**, preservano anche i funtori liberi. Quindi $\mathcal{F}_{\mathscr{T}}$ e $\mathcal{F}_{\mathscr{T}'}$ sono isomorfe. Allora per la proposizione A.6, $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ sono teorie di Lawvere isomorfe. □

Corollario A.8. *Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere e $\mathscr{T}' = \mathscr{L}(\mathscr{P}(\mathscr{T}))$. Allora $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ sono teorie di Lawvere isomorfe.*

Dimostrazione. Per la proposizione A.3 e per l'osservazione A.4, l'equivalenza di categorie tra $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_{\Pi}$ e $[\mathscr{T}', \mathscr{S}]_{\Pi}$ preserva i funtori dimenticanti, quindi, per il corollario precedente $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ sono isomorfe. □

Proposizione A.9. *Siano $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$ due presentazioni di varietà. Se $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ e $\mathscr{L}(\mathbb{V}')$ sono teorie di Lawvere isomorfe, allora* $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ *e* $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}'$ *sono term-equivalent.*

Dimostrazione. Per la proposizione 7.9, $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ e $\mathscr{L}(\mathbb{V}')$ sono rispettivamente le opposte delle sottocategorie piene di $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}'$ generate dai modelli liberi. Quindi $\mathscr{L}(\mathbb{V}) =: {\mathcal{F}_{\mathbb{V}}}^{op}$ e $\mathscr{L}(\mathbb{V}') =: {\mathcal{F}_{\mathbb{V}'}}^{op}$ e $H\colon \mathcal{F}_{\mathbb{V}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{V}'}$, $K\colon \mathcal{F}_{\mathbb{V}'} \to \mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ isomorfismo tra $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ e $\mathcal{F}_{\mathbb{V}'}$ (in particolare, dato che H è pieno, fedele e suriettivo, si può prendere K tale che $HK = id_{\mathcal{F}_{\mathbb{V}}}$). Indichiamo inoltre con $\mathscr{O}$ e $\mathscr{O}'$ gli insiemi delle operazioni fondamentali rispettivamente di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$ e con $\rho\colon \mathscr{O} \to \omega$, $\rho'\colon \mathscr{O}' \to \omega$ i tipi di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$.

Costruiamo una term-equivalence tra $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}$ e $\mathrm{Mod}\,\mathbb{V}'$. Definiamo $D\colon \mathscr{O} \to T_{\rho'}(X_{\omega})$ come di seguito. Per ogni $f \in \mathscr{O}$ simbolo di operazione n-aria questo corrisponde a un morfismo $\overline{f}\colon [x_1] \in F_1 \mapsto [f(x_1, \dots, x_n)] \in F_n$. Allora si può considerare $H\overline{f}\colon F_1' \to F_n'$ e, utilizzando l'assioma della scelta, si può selezionare un termine $t \in H\overline{f}([x_1'])$. Poniamo quindi $D(f) = t$.

Osserviamo che D può essere estesa a tutto $T_\rho(X_\omega)$, ponendo $D(t) = s$ per un $s \in H\bar{t}([x'_1])$ e, in questo modo, se f è un termine n-ario e $s_1, \dots, s_n$ sono termini m-ari, componendo si ottiene che $[D(f[s_1, \dots, s_n])] = [D(f)[D(f_1), \dots, D(f_n)]]$. Infatti, procedendo per induzione sulla complessità k di un termine, il passo base è banale; per il passo induttivo, siano $t = f[s_1, \dots, s_n]$ con f n-aria e $s_1, \dots, s_n$ termini m-ari di complessità minore di k. Allora $[D(t)] = [D(f[s_1, \dots, s_n])] = H\bar{t}$, ma $\bar{t} = \overline{f} \circ g$ dove $g\colon F_n \to F_m$ è l'unico morfismo che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[dd, "\overline{f}"] & \\ F_1 \arrow[dr, "\iota_1^{(n)}"'] \arrow[ddr, bend right, "\overline{s_1}"'] & \cdots & F_1 \arrow[dl, "\iota_n^{(n)}"] \arrow[ddl, bend left, "\overline{s_n}"] \\ & F_n \arrow[d, dashed, "g"] & \\ & F_m & \end{tikzcd} \quad \iff \quad \begin{tikzcd} & F'_1 \arrow[dd, "H\overline{f}"] & \\ F'_1 \arrow[dr, "\iota'^{(n)}_1"'] \arrow[ddr, bend right, "H\overline{s_1}"'] & \cdots & F'_1 \arrow[dl, "\iota'^{(n)}_n"] \arrow[ddl, bend left, "H\overline{s_n}"] \\ & F'_n \arrow[d, dashed, "Hg"] & \\ & F'_m & \end{tikzcd}$$

Per la funtorialità di H, $[D(f)] = H\overline{f} \circ Hg = [D(f)[D(f_1), \dots, D(f_n)]]$.

Si noti che D è un'interpretazione. Infatti $\forall\, f \in \mathscr{O}$, $\rho(f) = \rho'(D(f))$ in quanto H è un isomorfismo di teorie di Lawvere, quindi $H(F_n) = F'_n$. Inoltre per ogni algebra $A \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}'$, $A^D \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}$; infatti se in $\mathbb{V}$ vale $s \approx t$ per s, t termini n-ari, allora $\bar{s}([x_1]) = \bar{t}([x_1])$ perché s e t sono nella stessa classe di F_n, quindi $\bar{s} = \bar{t} \Rightarrow D(s) \approx D(t)$.

Analogamente definiamo $E\colon \mathscr{O}' \to T_\rho(X_\omega)$ come di seguito. Per ogni $g \in \mathscr{O}'$ simbolo di operazione n-aria questo corrisponde a un morfismo $\overline{g}\colon [x'_1] \in F'_1 \mapsto [g(x'_1, \dots, x'_n)] \in F'_n$. Allora si può considerare $K\overline{g}\colon F_1 \to F_n$ e, utilizzando l'assioma della scelta, si può selezionare un termine $s \in K\overline{g}([x_1])$. Poniamo quindi $E(g) = s$. Come prima, si noti che E così definita è un'interpretazione.

Per provare che D ed E formano una term-equivalence, consideriamo $A \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}$ e proviamo che $A^{ED} = A$ dove $A^E = \langle A, \{E(g)^A\}_{g \in \mathscr{O}'} \rangle$ e $A^{ED} = \langle A, \{D(E(g))^{A^E}\}_{g \in \mathscr{O}'} \rangle$. Dunque $A^{ED} = A \Leftrightarrow \forall\, g \in \mathscr{O}'\ D(E(g))^{A^E} = g^{A^E} \Leftrightarrow [D(E(g))] = [g]$. Allora $E(g) = t \in K\overline{g}([x_1])$ e $\bar{t}\colon [x_1] \mapsto K\overline{g}([x_1])$, cioè $\bar{t} = K\overline{g}$. Quindi $[D(E(g))] = H\bar{t}([x'_1]) = HK\overline{g}([x'_1])$. Ma H, K formano un isomorfismo di teorie di Lawvere da cui si ha $[D(E(g))] = HK\overline{g}([x'_1]) = \overline{g}([x'_1]) = [g]$. Dunque per ogni $A \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}$, $A^{ED} = A$ e, analogamente, per ogni $B \in \operatorname{Mod} \mathbb{V}'$, $B^{DE} = B$, cioè $\operatorname{Mod} \mathbb{V}$ e $\operatorname{Mod} \mathbb{V}'$ sono term-equivalent. $\square$

Corollario A.10. *Sia* $\mathbb{V}$ *una presentazione di varietà e* $\mathbb{V}' = \mathscr{P}(\mathscr{L}(\mathbb{V}))$. *Allora* $\operatorname{Mod} \mathbb{V}$ *e* $\operatorname{Mod} \mathbb{V}'$ *sono term-equivalent.*

Dimostrazione. Per il corollario A.8, $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ è isomorfa a $\mathscr{L}(\mathbb{V}')$, da cui, utilizzando la proposizione A.9, si ottiene la tesi. $\square$

Proposizione A.11. *Se* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{V}'$ *sono due presentazioni di varietà, le seguenti sono equivalenti:*

1. $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ *e* $\operatorname{Mod}\mathbb{V}'$ *sono term-equivalent;*
2. *le teorie di Lawvere* $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ *e* $\mathscr{L}(\mathbb{V}')$*, presentate nella definizione 7.8, sono isomorfe;*
3. *esiste un'equivalenza di categorie tre* $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ *e* $\operatorname{Mod}\mathbb{V}'$ *che preserva i funtori dimenticanti.*

Dimostrazione. Osserviamo che il punto 3 è equivalente a chiedere che esista un'equivalenza di categorie tra $[\mathscr{L}(\mathbb{V}),\mathscr{S}]_\Pi$ e $[\mathscr{L}(\mathbb{V}),\mathscr{S}]_\Pi$ che preservi i funtori dimenticanti. Infatti $\operatorname{Mod}\mathbb{V} \simeq [\mathscr{L}(\mathbb{V}),\mathscr{S}]_\Pi$, $\operatorname{Mod}\mathbb{V}' \simeq [\mathscr{L}(\mathbb{V}'),\mathscr{S}]_\Pi$ e, per l'osservazione A.4, queste equivalenze preservano i funtori dimenticanti.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Indichiamo con $\mathscr{O}$ e $\mathscr{O}'$ gli insiemi delle operazioni fondamentali rispettivamente di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$ e con $\rho\colon \mathscr{O} \to \omega$, $\rho'\colon \mathscr{O}' \to \omega$ i tipi di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$. Se $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$ sono term-equivalent, esistono due interpretazioni $D\colon \mathscr{O} \to T_{\rho'}(X_\omega)$ e $E\colon \mathscr{O}' \to T_\rho(X_\omega)$ che si estendono a $D^*\colon T_\rho(X_\omega) \to T_{\rho'}(X_\omega)$ e $E^*\colon T_{\rho'}(X_\omega) \to T_\rho(X_\omega)$. Dato che D è un'interpretazione, se in $\mathbb{V}$ vale $t \approx s$, allora $D^*(t) \approx D^*(s)$, quindi si può considerare

$$\overline{D}\colon [t] \in F_{\mathbb{V}}(X_\omega) \mapsto [D^*(t)] \in F_{\mathbb{V}'}(X_\omega)$$

e analogamente

$$\overline{E}\colon [t] \in F_{\mathbb{V}'}(X_\omega) \mapsto [E^*(t)] \in F_{\mathbb{V}}(X_\omega).$$

Inoltre, dato che D ed E formano una term-equivalence, vale

$$\forall\, t \in T_\rho(X_\omega) \quad E^*(D^*(t)) \approx t \Rightarrow \overline{E}(\overline{D}(t)) = t$$

e analogamente

$$\forall\, s \in T_{\rho'}(X_\omega) \quad D^*(E^*(s)) \approx s \Rightarrow \overline{D}(\overline{E}(s)) = s.$$

Per la proposizione 7.9, $\mathscr{L}(\mathbb{V})$ e $\mathscr{L}(\mathbb{V}')$ sono rispettivamente le opposte delle sottocategorie piene di $\operatorname{Mod}\mathbb{V}$ e $\operatorname{Mod}\mathbb{V}'$ generate dai modelli liberi. Chiamiamo $\mathscr{L}(\mathbb{V}) =: \mathcal{F}_{\mathbb{V}}{}^{\mathrm{op}}$ e $\mathscr{L}(\mathbb{V}') =: \mathcal{F}_{\mathbb{V}'}{}^{\mathrm{op}}$ dove $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{F'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono gli oggetti rispettivamente di $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ e $\mathcal{F}_{\mathbb{V}'}$. Allora è possibile costruire un isomorfismo tra $\mathcal{F}_{\mathbb{V}}$ e $\mathcal{F}_{\mathbb{V}'}$ come segue:

$$\begin{aligned} H\colon \mathcal{F}_{\mathbb{V}} &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{V}'} \\ F_n &\longmapsto F'_n \\ (t\colon F_n \to F_m) &\longmapsto (\overline{E} \circ t \circ \overline{D}\colon F'_n \to F'_m) \end{aligned}$$

H è banalmente un funtore, infatti $H id_{F_n} = id_{F'_n}$ e $H(t \circ s) = \overline{E} \circ t \circ s \circ \overline{D} = \overline{E} \circ t \circ \overline{D} \circ \overline{E} \circ s \circ \overline{D} = Ht \circ Hs$. Inoltre H ha come inverso

$$\begin{aligned} K\colon \mathcal{F}_{\mathbb{V}'} &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{V}} \\ F'_n &\longmapsto F_n \\ (t\colon F'_n \to F'_m) &\longmapsto (\overline{D} \circ t \circ \overline{E}\colon F_n \to F_m) \end{aligned}$$

infatti $HK(F'_n) = F'_n$, $KH(F_n) = F_n$, $HK(t) = \overline{E} \circ \overline{D} \circ t \circ \overline{E} \circ \overline{D} = s$ e $KH(s) = s$. Quindi H e K formano un isomorfismo di teorie di Lawvere.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Segue dalla proposizione A.9.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Chiamiamo $\mathscr{L}(\mathbb{V}) = \mathscr{T}$, $\mathscr{L}(\mathbb{V}') = \mathscr{T}'$, $\{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gli oggetti di $\mathscr{T}$ e $\{T'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gli oggetti di $\mathscr{T}'$. Per ipotesi esiste un isomorfismo tra $H\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$, $K\colon \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$. Allora si può costruire un'equivalenza di categorie tra $[\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ e $[\mathscr{T}', \mathscr{S}]_\Pi$ considerando

$$\begin{aligned} \overline{K} = \_ \circ K\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi &\longrightarrow [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_\Pi \\ F &\longmapsto F \circ K \\ (\alpha\colon F \Rightarrow G) &\longmapsto (\overline{K}\alpha\colon F \circ K \Rightarrow G \circ K) \end{aligned}$$

dove se $\alpha\colon F \Rightarrow G = \{\alpha_n\colon F(T_n) \to G(T_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, allora $\overline{K}\alpha = \{\overline{K}\alpha_n\colon F(K(T'_n)) \to G(K(T'_n))\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\alpha_n\colon F(T_n) \to G(T_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Analogamente consideriamo

$$\begin{aligned} \overline{H} = \_ \circ H\colon [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_\Pi &\longrightarrow [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \\ F &\longmapsto F \circ H \\ (\alpha\colon F \Rightarrow G) &\longmapsto (\overline{H}\alpha\colon F \circ H \Rightarrow G \circ H). \end{aligned}$$

Allora $\overline{K}$ e $\overline{H}$ formano un'equivalenza di categorie, infatti se $F \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ e $G \in [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_\Pi$, $\overline{H}(\overline{K}(F)) = F \circ K \circ H \simeq F$ e $\overline{K}(\overline{H}(G)) = G \circ H \circ K \simeq G$. Inoltre $\overline{K}$ e $\overline{H}$ preservano i funtori dimenticanti, infatti, detti $U\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \to \mathscr{S}$ e $U'\colon [\mathscr{T}', \mathscr{S}]_\Pi \to \mathscr{S}$ i funtori dimenticanti, se $F \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$, vale

$$U' \circ \overline{K}(F) = U'(F \circ K) = F \circ K(T'_1) = F(K(T'_1)) = F(T_1) = U(F)$$

e se $F, G \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$, $\alpha\colon F \Rightarrow G$, vale

$$U' \circ \overline{K}(\alpha) = U'(\overline{K}\alpha) = K\alpha_1 = \alpha_1 = U(\alpha).$$

Analogamente $U \circ \overline{H} = U'$.

$\boxed{3. \Rightarrow 2.}$ Segue dal corollario A.7. $\square$

A.2 FUNTORI ALGEBRICI

Cerchiamo ora una generalizzazione della definizione di funtore dimenticante descritta nella Definizione A.2. Questa generalizzazione è formalizzata tramite il concetto di "funtore algebrico".

Definizione A.12

Sia $F\colon \mathscr{R} \to \mathscr{T}$ un morfismo di teorie di Lawvere. Il funtore di precomposizione con F

$$\begin{aligned} - \circ F\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi &\longrightarrow [\mathscr{S}, \mathscr{S}]_\Pi \\ G &\longmapsto G \circ F \\ (\alpha\colon G \Rightarrow H) &\longmapsto (\alpha F\colon G \circ F \Rightarrow H \circ F) \end{aligned}$$

è detto **funtore algebrico**.

Questa definizione ha senso, infatti, dato che sia G che F preservano i prodotti finiti, anche $G \circ F$ li preserva.

Mostriamo che i funtori dimenticanti (definizione A.2) sono un caso particolare di funtori algebrici.

Osserviamo che esiste una teoria di Lawvere, che indicheremo con $\mathscr{S}$, corrispondente alla presentazione di varietà senza assiomi, ossia la teoria di Lawvere che ha $\mathscr{S}$ per categoria dei modelli. Per la proposizione A.6, $\mathscr{S}^{\mathrm{op}}$ è isomorfa alla sottocategoria di $\mathscr{S}$ generata dai modelli liberi, cioè $\mathscr{S}^{\mathrm{op}}$ è isomorfa alla categoria costituita dagli insiemi finiti e dalle mappe di inclusione. Allora gli unici morfismi in $\mathscr{S}$ sono le proiezioni. Ne deriva la seguente proposizione.

Proposizione A.13. *La teoria degli insiemi $\mathscr{S}$ è un oggetto iniziale della categoria delle teorie di Lawvere con i morfismi tra esse.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{T}$ una teoria di Lawvere. Dato che in $\mathscr{S}$ le uniche mappe sono le proiezioni dei prodotti e queste, per definizione di morfismo di teorie di Lawvere, devono essere mandate necessariamente nelle proiezioni dei prodotti di $\mathscr{T}$, esiste un unico morfismo di teorie di Lawvere da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{T}$. □

Osservazione A.14. La categoria $[\mathscr{S}, \mathscr{S}]_\Pi$ è isomorfa a $\mathscr{S}$. Infatti, un funtore G da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{S}$ che preserva i prodotti è completamente determinato da $G(S^1)$: se $G(S^1) = I$, si deve avere necessariamente $G(S^n) = I^n$ e le proiezioni devono essere mandate nelle proiezioni, perché G preserva i prodotti finiti. Inoltre se $G, H \in [\mathscr{S}, \mathscr{S}]_\Pi$, una trasformazione naturale $\alpha\colon G \Rightarrow H$ è completamente determinata da α_1 poiché, dalla naturalità e dal fatto che G e H preservano i prodotti, segue che, preso $(x_1, \dots, x_n) \in G(S^n) = (G(S^1))^n$, si deve avere $\alpha_n(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1(x_1), \dots, \alpha_1(x_n))$. Possiamo, quindi, identificare le due categorie.

Proposizione A.15. *Se $\mathscr{T}$ è una teoria di Lawvere e K è l'unico morfismo da $\mathscr{S}$ in $\mathscr{T}$, il funtore dimenticante $U\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \to \mathscr{S}$ è uguale al funtore algebrico $- \circ K\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \to [\mathscr{S}, \mathscr{S}]_\Pi$.*

Dimostrazione. Preso $G \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$, il funtore $G \circ K \in [\mathscr{S}, \mathscr{S}]_\Pi$ manda S^1 nell'insieme $G \circ K(S^1) = G(T^1) = U(G)$. Inoltre, presi $G, H \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$ e $\alpha \colon G \Rightarrow H$, $\alpha K \colon G \circ K \Rightarrow H \circ K$ è la trasformazione naturale determinata da $\alpha K_1 = \alpha_1 = U\alpha$. $\square$

Lemma A.16. *Sia I un insieme. Il funtore*

$$\begin{aligned} I \times - \colon \mathscr{S} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ J &\longmapsto I \times J \\ (f \colon J \to J') &\longmapsto ((id_I, f) \colon I \times J \to I \times J') \end{aligned}$$

preserva i colimiti.

Dimostrazione. Sia $G \colon B \to \mathscr{S}$ un diagramma. Supponiamo che esista il colimite di G e che $\operatorname{colim} G = (C, (p_B)_{B \in \mathscr{B}})$; vogliamo provare che

$$\operatorname{colim}(I \times G-) \cong (I \times C, ((id_I, p_B))_{B \in \mathscr{B}}).$$

Consideriamo quindi $(M, (q_B \colon I \times GB \to M)_{B \in \mathscr{B}})$ cocono su $I \times G-$, questo induce per ogni $i \in I$ una famiglia di mappe $(q^i_B \colon x \in GB \mapsto q_B(i, x) \in M)_{B \in \mathscr{B}}$. Essendo, per ogni $i \in I$, $(M, (q^i_B)_{B \in \mathscr{B}})$ un cocono su G, esiste un'unica mappa $q^i \colon C \to M$ tale che $q^i_B = q^i \circ p_B$ per ogni oggetto $B \in \mathscr{B}$. Allora resta definita la mappa $q \colon (i, c) \in I \times C \mapsto q^i(c) \in M$ per cui, presi $i \in I$ e $x \in GB$, vale:

$$(q \circ (id_I, p_B))(i, x) = q(i, p_B(x)) = (q^i \circ p_B)(x) = q^i_B(x) = q_B(i, x),$$

ossia $q_B = q \circ (id_I, p_B)$ per ogni $B \in \mathscr{B}$. Resta da provare che q è l'unica mappa per cui avviene ciò. Supponiamo che esista $f \colon I \times C \to M$ tale che $q_B = f \circ (id_I, p_B)$ per ogni $B \in \mathscr{B}$. Allora per ogni $i \in I$ e $x \in GB$ vale $q^i_B(x) = q_B(i, x) = f(i, p_B(x))$, da cui, detta $f^i \colon c \in C \mapsto f(i, c) \in M$, vale $q^i_B = f^i \circ p_B$, cioè $f^i = q^i$ per ogni $i \in I$. Ne segue che $f = q$. $\square$

Analogamente si prova che, se J è un insieme, il funtore $- \times J$ preserva i colimiti.

Lemma A.17. *Siano $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ due categorie piccole e $F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{S}$, $G \colon \mathscr{B} \to \mathscr{S}$ due funtori. Allora il colimite del funtore:*

$$\begin{aligned} F \times G \colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} &\longrightarrow \mathscr{S} \\ (A, B) &\longmapsto FA \times GB \end{aligned}$$

è $(\operatorname{colim} F) \times (\operatorname{colim} G)$.

Dimostrazione. Applicando il lemma A.16, si ha

$$\begin{aligned} (\operatorname*{colim}_A F(A)) \times (\operatorname*{colim}_B (G(B)) &\cong \operatorname*{colim}_A (F(A) \times \operatorname*{colim}_B G(B)) = \\ &\cong \operatorname*{colim}_A (\operatorname*{colim}_B (F(A) \times G(B)) = \\ &\cong \operatorname*{colim}_{(A,B)} (F(A) \times G(B)) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale per la commutatività dei colimiti. $\square$

Teorema A.18

Ogni funtore algebrico ha un aggiunto sinistro.

Dimostrazione. Siano $\mathscr{R}$ e $\mathscr{T}$ teorie di Lawvere con oggetti rispettivamente $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{T^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e sia $F\colon \mathscr{R} \to \mathscr{T}$ un morfismo di teorie di Lawvere. Per ogni modello $G\colon \mathscr{R} \to \mathscr{S}$, essendo $\mathscr{R}$ una categoria piccola e $\mathscr{S}$ una categoria cocompleta (**??**), per il teorema **??**, esiste l'estensione di Kan sinistra di G lungo F e, per la proposizione **??**, $\mathrm{Lan}_F\colon [\mathscr{R}, \mathscr{S}] \to [\mathscr{T}, \mathscr{S}]$ è l'aggiunto sinistro del funtore $- \circ F\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}] \to [\mathscr{R}, \mathscr{S}]$. Quindi, per provare che $- \circ F\colon [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi \to [\mathscr{R}, \mathscr{S}]_\Pi$ ha un aggiunto sinistro, basta mostrare che, se $G \in [\mathscr{R}, \mathscr{S}]_\Pi$, allora l'estensione di Kan di G lungo F, che indicheremo con K, preserva i prodotti finiti, ossia $K \in [\mathscr{T}, \mathscr{S}]_\Pi$.

Ricordiamo com'è costruita l'estensione di Kan K nel teorema **??**. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con $\mathscr{E}_n$ la categoria degli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F-, T^n)$, cioè la categoria data da:

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathscr{E}) &= \{(R^m, t) \mid m \in \mathbb{N},\ t\colon T^m \to T^n\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_n}((R^m, t), (R^k, s)) &= \{f\colon R^m \to R^k \mid s \circ Ff = t\}, \end{aligned}$$

in particolare, possiamo considerare equivalentemente come oggetti di $\mathscr{E}_n$ le coppie (m, t) con $m \in \mathbb{N}$ e $t\colon T^m \to T^n$. Indichiamo, inoltre, con $\Phi_n\colon \mathscr{E}_n \to \mathscr{R}$ il funtore dimenticante. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è stato definito $K(T^n) := \mathrm{colim}(G \circ \Phi_n)$.

Vogliamo provare che $K(T^n) \cong K(T^1)^n \Leftrightarrow \mathrm{colim}(G \circ \Phi_n) \cong (\mathrm{colim}(G \circ \Phi_1))^n$.

Per il lemma A.17, vale $(\mathrm{colim}(G \circ \Phi_1))^n \cong (\mathrm{colim}(G \circ \Phi_1))^n$, inoltre, poiché G preserva i prodotti, per ogni $(m, t) \in \mathscr{E}_n$, si ha $((G \circ \Phi_1)(m, t))^n \cong (G(\Phi_1(m, t)))^n \cong G(\Phi_1(m, t)^n)$. Allora, detto Φ_1^n il funtore

$$\begin{aligned} \Phi_1^n\colon \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_1 &\longrightarrow \mathscr{R} \\ (m_i, t_i)_{i=1,\ldots,n} &\longmapsto R^{m_1} \times \cdots \times R^{m_n} \cong R^{m_1 + \cdots + m_n}, \end{aligned}$$

vale

$$(\mathrm{colim}(G \circ \Phi_1))^n \cong \mathrm{colim}(G \circ \Phi_1)^n \cong \mathrm{colim}(G \circ \Phi_1^n).$$

Consideriamo il funtore

$$\begin{aligned} \Psi_n\colon \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_1 &\longrightarrow \mathscr{E}_n \\ (m_i, t_i)_{i=1,\ldots,n} &\longmapsto \left(\sum_{i=1}^n m_i, \prod_{i=1}^n t_i \right). \end{aligned}$$

Allora $\Phi_n \circ \Psi_n = (\Phi_1)^n$, quindi, per provare la tesi, è sufficiente dimostrare che $\mathrm{colim}(G \circ \Phi_n \circ \Psi_n) \cong \mathrm{colim}(G \circ \Phi_n)$.

Mostriamo in generale che, se $H\colon \mathscr{E}_n \to \mathscr{X}$, vale $\operatorname{colim}(H \circ \Psi_n) \cong \operatorname{colim}(H)$. Osserviamo che un cocono $\alpha\colon H \Rightarrow \Delta_X$ (dove Δ_X è il funtore costante in $X \in \mathscr{X}$), induce un cocono $\alpha\Psi_n\colon H \circ \Psi_n \Rightarrow \Delta_X$.

Viceversa, proviamo che, se $\beta\colon H \circ \Psi_n \Rightarrow \Delta_X$ è un cocono su $H \circ \Psi_n$, esiste un unico cocono $\gamma\colon H \Rightarrow \Delta_X$ tale che $\gamma\Psi_n = \beta$, ossia tale che per ogni $(m_i, t_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_1$, si ha $\gamma_{(\sum_i m_i, \prod_i t_i)} = \beta_{((m_i,t_i)_{i=1,\dots,n})}$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, consideriamo il morfismo $\delta_m\colon R^m \to (R^m)^n$ tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ $\pi_i^m \circ \delta_m = id_{R^m}$ dove $\pi_i^m\colon (R^m)^n \to R^m$ è l'i-esima proiezione. δ induce un morfismo $\delta_m\colon (m, t) \to (m \cdot n, \prod_{i=1}^n (p_i \circ t))$ in $\mathscr{E}_n$, dove p_i è l'i-esima proiezione di T^n su T^1. Infatti vale $\prod_{i=1}^n (p_i \circ t) \circ F\delta_m = t$. Allora, dalla naturalità di γ, si deve avere necessariamente

$$
\begin{tikzcd}
 & T^m \arrow[d, "F\delta_m"] \arrow[ddl, bend right, "id_{T^m}"'] \arrow[ddr, bend left, "id_{T^m}"] & \\
 & (T^m)^n \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\prod(p_i \circ t)"] & \\
T^m \arrow[dr, "t"] & & T^m \arrow[dl, "t"'] \\
 & T^n \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_n"] & \\
T^1 & & T^1
\end{tikzcd}
$$

$$\gamma_{(m,t)} = \gamma_{(mn, \prod_i (p_i \circ t))} \circ H\delta_m = \beta_{(m, p_i \circ t)_{i=1,\dots,n}} \circ H\delta_m.$$

Controlliamo la naturalità di γ appena definita. Siano (m, t), (k, s) oggetti di $\mathscr{E}_n$ e $f\colon R^m \to R^k$ tale che $s \circ Ff = t$ un morfismo in $\mathscr{E}_n$. Vogliamo provare che $\gamma_{(m,t)} = \gamma_{(k,s)} \circ Hf$, ossia che $\beta_{(m,p_i \circ t)_{i=1,\dots,n}} \circ H\delta_m = \beta_{(k,p_i \circ s)_{i=1,\dots,n}} \circ H\delta_k \circ Hf$. Notiamo che f induce per ogni $i = 1, \dots, n$ un morfismo $f\colon (m, p_i \circ t) \to (k, p_i \circ s)$ in $\mathscr{E}_1$ (in quanto da $s \circ Ff = t$ segue che $p_i \circ s \circ Ff = p_i \circ t$) e quindi un morfismo $f \times \cdots \times f = f^n\colon (mn, \prod(p_i \circ t)) \to (kn, \prod(p_i \circ s))$ in $\mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_1$. Allora si ha:

$$
\begin{aligned}
\pi_i^k \circ f^n \circ \delta_m = f \circ \pi_i^m \circ \delta_m = f &= \pi_i^k \circ \delta_k \circ f \quad \forall\, i = 1, \dots, n \\
&\Rightarrow f^n \circ \delta_m = \delta_k \circ f \\
&\Rightarrow Hf^n \circ H\delta_m = H\delta_k \circ Hf.
\end{aligned}
$$

Inoltre dalla naturalità di β si ottiene:

$$\beta_{(m,p_i \circ t)_{i=1,\dots,n}} = \beta_{(k,p_i \circ s)_{i=1,\dots,n}} \circ Hf^n.$$

Dunque il seguente diagramma commuta:

$$
\begin{tikzcd}
H(m,t) \arrow[r, "H\delta_m"] \arrow[d, "Hf"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H(mn, \prod(p_i \circ t)) \arrow[r, "\beta_{(m,p_i \circ t)_{i=1,\dots,n}}"] \arrow[d, "Hf^n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "id_X"] \\
H(k,s) \arrow[r, "H\delta_k"'] & H(kn, \prod(p_i \circ s)) \arrow[r, "\beta_{(k,p_i \circ s)_{i=1,\dots,n}}"'] & X
\end{tikzcd}
$$

ossia γ è una trasformazione naturale.

Indichiamo con $\beta\colon H \circ \Psi_n \Rightarrow \Delta_{\mathrm{colim}(H\circ\Psi_n)}$ il cocono limite del funtore $H \circ \Psi_n$ e con $\alpha\colon H \Rightarrow \Delta_{\mathrm{colim}(H)}$ il cocono limite di H. Per quanto appena mostrato, β induce un cocono $\gamma\colon H \Rightarrow \Delta_{\mathrm{colim}(H\circ\Psi_n)}$ tale che $\gamma\Psi_n = \beta$. Di conseguenza, esiste un unico morfismo $k\colon \mathrm{colim}(H) \to \mathrm{colim}(H \circ \Psi_n)$ tale che $k \circ \alpha_{(m,t)} = \gamma_{(m,t)}$ per ogni $(m,t) \in \mathscr{E}_n$, dunque, in particolare, $k \circ \alpha_{(\sum m_i, \prod t_i)} = \beta_{(m_i,t_i)_{i=1,\dots,n}}$. Viceversa, α induce un cocono $\alpha\Psi_n\colon H \circ \Psi_n \Rightarrow \Delta_{\mathrm{colim}(H)}$, per cui esiste un unico morfismo $h\colon \mathrm{colim}(H \circ \Psi_n) \to \mathrm{colim}(H)$ tale che $h \circ \beta_{(m_i,t_i)_{i=1,\dots,n}} = \alpha_{(\sum m_i, \prod t_i)}$ per ogni $(m_i,t_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_1$. Inoltre h è tale che $h \circ \gamma_{(m,t)} = h \circ \beta_{(m,p_i\circ t)_{i=1,\dots,n}} \circ H\delta_m = \alpha_{(mn,\prod(p_i\circ t)} \circ H\delta_m = \alpha_{(m,t)}$ per ogni $(m,t) \in \mathscr{E}_n$.

Quindi $h \circ k\colon \mathrm{colim}(H) \to \mathrm{colim}(H)$ è un morfismo tale che

$$h \circ k \circ \alpha_{(m,t)} = h \circ \gamma_{(m,t)} = \alpha_{(m,t)} \Rightarrow h \circ k = id_{\mathrm{colim}(H)}$$

e $k \circ h\colon \mathrm{colim}(H \circ \Psi_n) \to \mathrm{colim}(H \circ \Psi_n)$ è un morfismo tale che

$$k \circ h \circ \beta_{(m_i,t_i)_{i=1,\dots,n}} = k \circ \alpha_{(\sum m_i, \prod t_i)} = \beta_{(m_i,t_i)_{i=1,\dots,n}} \Rightarrow k \circ h = id_{\mathrm{colim}(H\circ\Psi_n)}.$$

In conclusione $\mathrm{colim}(H) \cong \mathrm{colim}(H \circ \Psi_n)$ per ogni funtore $H\colon \mathscr{E}_n \to \mathscr{X}$, da cui $\mathrm{colim}(G \circ \Phi_n \circ \Psi_n) \cong \mathrm{colim}(G \circ \Phi_n)$. $\square$

Osservazione A.19. Se $\mathscr{T}$ ed $\mathscr{R}$ sono teorie di Lawvere e $H\colon \mathscr{R} \to \mathscr{T}$ è un morfismo di teorie di Lawvere, allora il funtore algebrico $- \circ H$ indotto da H commuta con i funtori dimenticanti. Questo segue immadiatamente dal fatto che H commuta con gli unici morfismi di teorie di Lawvere $\sigma_{\mathscr{T}}\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ e $\sigma_{\mathscr{R}}\colon \mathscr{S} \to \mathscr{R}$, cioè da $H \circ \sigma_{\mathscr{R}} = \sigma_{\mathscr{T}}$ segue $(- \circ \sigma_{\mathscr{R}}) \circ (- \circ H) = (- \circ \sigma_{\mathscr{T}})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T} & & \mathscr{R} \arrow[ll, "H"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& \mathscr{S} \arrow[ul, "\sigma_{\mathscr{T}}"] \arrow[ur, "\sigma_{\mathscr{S}}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi} \arrow[dr, "-\circ\sigma_{\mathscr{T}}"'] & & {[\mathscr{R},\mathscr{S}]_\Pi} \arrow[ll, "-\circ H"'] \arrow[dl, "-\circ\sigma_{\mathscr{S}}"] \arrow[dl, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] \\
& \mathscr{S} &
\end{tikzcd}$$

In effetti si può dimostrare che questa proprietà caratterizza i funtori algebrici, ossia che se un funtore $W\colon [\mathscr{T},\mathscr{S}]_\Pi \to\colon [\mathscr{R},\mathscr{S}]_\Pi$ commuta con i funtori dimenticanti allora W è un funtore algebrico, ossia esiste $H\colon \mathscr{R} \to \mathscr{T}$ tale che $- \circ H \cong W$.

Questo risultato si può vedere come l'analogo della corrispondenza tra isomorfismi di teorie di Lawvere e equivalenza tra categorie di modelli che commutano con i funtori dimenticanti, mostrata nella proposizione A.11.

A.3 CONDIZIONI DI MALCEV

Ricordiamo che, se R e S sono due relazioni binarie su A, abbiamo definito

$$R \circ S := \{(x,y) \in A^2 \mid \exists\, w \in A \text{ tale che } (x,w) \in R \text{ e } (w,y) \in S\}.$$

Ci chiediamo se, sapendo che R e S sono relazioni d'equivalenza, è possibile concludere che anche $R \circ S$ lo è.

Lemma A.20. *Siano R e S relazioni d'equivalenza su A. La relazione $R \circ S$ è d'equivalenza se e solo se $R \circ S = S \circ R$.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo che $R \circ S$ sia d'equivalenza. Allora

$$\begin{aligned}(x,y) \in R \circ S \text{ se e soltanto se } & (y,x) \in R \circ S \\ \text{se e soltanto se } & \exists\, w \text{ tale che } (y,w) \in R \text{ e } (w,x) \in S \\ \text{se e soltanto se } & \exists\, w \text{ tale che } (w,x) \in R \text{ e } (x,w) \in S \\ \text{se e soltanto se } & (x,y) \in S \circ R.\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $R \circ S = S \circ R$ e mostriamo che $R \circ S$ è d'equivalenza.

RIFLESSIVITÀ $\forall\, x\ (x,x) \in R \circ S$ poiché $(x,x) \in R$ e $(x,x) \in S$.

SIMMETRIA Supponiamo che $(x,y) \in R \circ S$, allora per definizione $\exists\, w$ tale che $(x,w) \in R$ e $(w,y) \in S$. Quindi, dalla simmetria di R e S, $(w,x) \in R$ e $(y,w) \in S$ se e soltanto se $(y,x) \in S \circ R = R \circ S$.

TRANSITIVITÀ Supponiamo che $(x,y) \in R \circ S$ e $(y,z) \in R \circ S$, allora $\exists\, t$ tale che $(x,t) \in R$ e $(t,y) \in S$ e $\exists\, s$ tale che $(y,s) \in R$ e $(s,z) \in S$. Di conseguenza $(t,s) \in S \circ R = R \circ S$ e ciò implica che $\exists\, w$ tale che $(t,w) \in R$ e $(w,s) \in S$. Quindi, dalla transitività di R e S segue che $(x,w) \in R$ e $(w,z) \in S$ per cui possiamo concludere che $(x,z) \in R \circ S$.

□

Osservazione A.21. Notiamo che se θ e ψ sono congruenze su $\mathscr{A}$ e $\theta \circ \psi = \psi \circ \theta$ allora $\theta \circ \psi$ è una congruenza. Infatti, consideriamo un'operazione fondamentale f di $\mathscr{A}$ di arietà n. Siano $\bar{a} := (a_1, \dots, a_n)$ e $\bar{b} := (b_1, \dots, b_n)$ e supponiamo $\bar{a}\ \theta \circ \psi\ \bar{b}$. Ciò è equivalente a $\exists\, \overline{w} := (w_1, \dots, w_n)$ tali che $\bar{a}\ \theta\ \overline{w}\ \psi\ \bar{b}$. Ma θ e ψ sono congruenze, dunque $f(\bar{a})\ \theta\ f(\overline{w})\ \psi\ f(\bar{b})$, allora, per definizione, $f(\bar{a})\ R \circ S\ f(\bar{b})$.

Definizione A.22

Se $\theta, \psi \in \mathtt{Con}(\mathscr{A})$, diremo che θ e ψ **permutano** se $\theta \circ \psi = \psi \circ \theta$. Diremo che $\mathscr{A}$ è **a congruenze permutabili** se tutte le sue congruenze permutano. Inoltre diremo che una classe di algebre $\mathcal{K}$ è **a congruenze permutabili** se tutte le algebre in $\mathcal{K}$ sono a congruenze permutabili.

Osservazione A.23. Se θ e ψ sono permutabili, allora $\theta \circ \psi = \theta \vee \psi$.

Infatti $\theta \subseteq \theta \circ \psi$ e $\psi \subseteq \theta \circ \psi$ perché, se $(x,y) \in \theta$, allora $(x,y) \in \theta$ e $(y,y) \in \psi$, dunque $(x,y) \in \theta \circ \psi$. Quindi $\theta \subseteq \theta \circ \psi$ e $\psi \subseteq \theta \circ \psi$ e ciò implica $\theta \cup \psi \subseteq \theta \circ \psi$, dunque $\theta \vee \psi \subseteq \theta \circ \psi$. Viceversa $(x,y) \in \theta \circ \psi$ significa che $\exists\, w$ tale che $(x,w) \in \theta$ e $(w,y) \in \psi \Rightarrow (x,w),(w,y) \in \theta \vee \psi \Rightarrow (x,y) \in \theta \vee \psi$ da cui $\theta \circ \psi \subseteq \theta \vee \psi$.

Teorema A.24 (Malcev, 1954)

Sia V una varietà di algebre. Le seguenti sono equivalenti:

1. *V è a congruenze permutabili;*
2. *$\mathscr{F}_V(3)$ è a congruenze permutabili;*
3. *esiste un termine $q(x,y,z)$ (detto **termine di Malcev**) tale che*

$$V \models q(x,y,y) = x = q(y,y,x).$$

Dimostrazione. Proviamo le varie implicazioni.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Verificata per definizione poiché $\mathscr{F}_V(3) \in V$.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Definiamo $\mathscr{F} := \mathscr{F}_V(3)$ e $\alpha := Cg^{\mathscr{F}}(x,y)$, $\beta := Cg^{\mathscr{F}}(y,z)$. Allora $(x,z) \in \alpha \circ \beta$ e per ipotesi $(x,z) \in \beta \circ \alpha$. Per definizione, ciò significa che $\exists\, u \in \mathscr{F}$ tale che $x \;\beta\; u \;\alpha\; z$. Siccome $\mathscr{F}$ è liberamente generata da x,y,z deve esistere un termine $q(x,y,z)$ tale che $u = q(x,y,z)$.

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra in V a $a,b \in A$. Definisco una funzione g tale che $g(x) = g(y) = a$ e $g(z) = b$, poiché $\mathscr{F}$ è libera in V, g si estende a un omomorfismo $\widehat{g}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{A}$ con $(x,y) \in \ker \widehat{g}$. Allora $\alpha \subseteq \ker \widehat{g}$ e, dato che $u \;\alpha\; z$, vale $(u,z) \in \ker \widehat{g}$. Calcoliamo

$$b = \widehat{g}(z) = \widehat{g}(u) = \widehat{g}(q^{\mathscr{F}}(x,y,z)) = q^{A}(g(x),g(y),g(z)) = q^{A}(a,a,b).$$

Poiché $a,b \in A$ e $\mathscr{A} \in V$ erano arbitrarie, abbiamo dimostrato che

$$V \models x = q(x,x,y)$$

Per l'altra equazione si procede in maniera simile.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Sia $\mathscr{A} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathtt{Con}(\mathscr{A})$. Basta mostrare che $\alpha \circ \beta \subseteq \beta \circ \alpha$, l'altra inclusione sarà analoga.

Sia $(a,b) \in \alpha \circ \beta \overset{\text{definition}}{\Longleftrightarrow} \exists\, c \in A$ tale che $a \;\alpha\; c \;\beta\; b$. Per ipotesi, esiste un termine $q(x,y,z)$ tale che $A \models q(x,y,y) = x = q(y,y,x)$. Notiamo che da $c \;\beta\; b$ segue, per la compatibilità di β rispetto alle operazioni fondamentali, che $q(a,b,b)\ \beta\ q(a,c,b)$ e, analogamente si ha $q^A(a,c,b)\ \alpha\ q^A(a,a,b)$. Allora otteniamo

$$a = q^A(a,b,b)\ \beta\ q^A(a,c,b)\ \alpha\ q^A(a,a,b) = b$$

quindi $(a,b) \in \beta \circ \alpha$.

□

Questo tipo di condizioni (cioè l'esistenza di termini con determinate proprietà) sono dette **condizioni alla Malcev**.

Esempio A.25. Consideriamo la varietà dei gruppi, con operazioni fondamentali $(+,-,0)$. Questa è a congruenze permutabili, infatti, considerato il termine $q(x,y,z) = x - y + z$, per ogni gruppo G si ha $G \vDash q(x,y,y) = x = q(y,y,x)$.

Definizione A.26

Una classe di algebre $\mathcal{K}$ è **a congruenze distributive** se i reticoli delle congruenze delle algebre in $\mathcal{K}$ sono tutti distributivi.

Teorema A.27 (Jònsson, 1967)

Se V è una varietà di algebre, allora le seguenti sono equivalenti:

1. *V è a congruenze distributive;*
2. *esiste un termine $m(x,y,z)$ (detto **termine di maggioranza**) tale che*

$$V \vDash m(x,x,y) = m(x,y,x) = m(y,x,x) = x.$$

Esempio A.28. I reticoli sono a congruenze distributive, infatti si può considerare come termine di maggioranza $m(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Definizione A.29

Una classe di algebre che sia a congruenze permutabili e a congruenze distributive viene detta **aritmetica**.

Teorema A.30 (Pixley, 1963)

Se V è una varietà di algebre, le seguenti sono equivalenti:

1. *V è aritmetica;*
2. *$\mathscr{F}_V(3)$ è aritmetica;*
3. *esiste un termine $p(x, y, z)$ tale che*

$$V \vDash p(x, y, x) = p(x, y, y) = p(y, y, x) = x.$$

A.4 ALGEBRE FINITAMENTE PRESENTATE

In ogni varietà esistono algebre libere su ogni insieme di generatori. Se $\mathscr{A} \in V$, si può considerare un insieme di generatori di $\mathscr{A}$, S. Quindi $S \subseteq A$ e $\mathrm{Sg}^{\mathscr{A}}(S) = \mathscr{A}$. Se la cardinalità di S è k, si può considerare $\mathscr{F}_V(k)$ e la biezione tra i generatori di $\mathscr{F}_V(k)$ e S. Quest'ultima si estende a un omomorfismo $h \colon \mathscr{F}_V(k) \to \mathscr{A}$. Ora si può osservare che h è suriettivo, infatti se $a \in A$, allora deve esistere un termine $t(x_1, \dots, x_k)$ tale che $a = t(s_1, \dots, s_k)$ dove $s_1, \dots, s_k \in S$. Quindi $\exists\, g_1, \dots, g_k \in k$ tale che $a = t(s_1, \dots, s_n) = t(h(g_1), \dots, h(g_n)) = h(t(g_1, \dots, g_n))$.

Siccome h è suriettivo $\mathscr{A} \cong \mathscr{F}_V(k) / \ker h$. Notiamo che possiamo prendere una relazione $R := \{(a_i, b_i) \mid i \in I\}$ tale che $\ker h = Cg^{\mathscr{F}_V(k)}(R)$.

Definizione A.31

Una presentazione per un'algebra $\mathscr{A}$ in una varietà V è data da un insieme di variabili $X := \{x_i \mid i \in I\}$ e un insieme di coppie di termini nelle variabili x_i, $R := \{(t_j, s_j) \mid j \in J\}$ tale che

$$\mathscr{A} \cong \frac{\mathscr{F}_V(X)}{Cg^{\mathscr{F}_V(X)}(R)}.$$

Denotiamo la presentazione con

$$\langle X \mid R \rangle$$

dove X è l'insieme dei **generatori** e R l'insieme dei **relatori**.

Definizione A.32

Un'algebra $\mathscr{A}$ è detta **finitamente presentabile** se è presentabile come $\langle X \mid R \rangle$ con X e R entrambi finiti.

Esempio A.33. $\mathscr{F}_V(n)$ è finitamente presentabile come $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \mid \varnothing \rangle$.
$\mathbb{Z}$ è un gruppo finitamente presentabile da $\langle \{x_1\} \mid \varnothing \rangle$.

A.5 ALGEBRE PARZIALI E PROPRIETÀ DELL'IMMERSIONE FINITA (FEP)

Definizione A.34

Dato un tipo ρ diremo che (P, F) è un'**algebra parziale** se le operazioni $f \in F$ sono definite parzialmente su P. In altre parole, se $p_1, \dots, p_n \in P$ e $f \in F$ con $\rho(f) = n$, allora $f(p_1, \dots, p_n)$ o non è definita o, se è definita, appartiene a P.

Se $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono due algebre parziali dello stesso tipo ρ e $h\colon P \to Q$ diremo che h è un **omomorfismo di algebre parziali** se $\forall\, p_1, \dots, p_n \in P$ e $\forall\, f$ operazione fondamentale n-aria del tipo ρ,

$$\text{se esiste } f(p_1, \dots, p_n), \text{ allora } h(f^P(p_1, \dots, p_n)) = f^Q(h(p_1), \dots, h(p_n))$$

quindi, in particolare, $f^Q(h(p_1), \dots, h(p_n))$ dev'essere definita.

Un **isomorfismo di algebre parziali** è un omomorfismo che ha un inverso.

Definizione A.35

Un'**immersione** di un'algebra parziale $\mathscr{P}$ in un'altra algebra parziale $\mathscr{Q}$ è un omomorfismo iniettivo $\varphi\colon \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$.

Quindi, se $f^P(p_1, \dots, p_n)$ esiste, deve valere

$$\varphi(f^P(p_1, \dots, p_n)) = f^Q(\varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)).$$

Definizione A.36

Un'**immersione piena** di un'algebra parziale $\mathscr{P}$ in un'altra algebra parziale $\mathscr{Q}$ è un omomorfismo iniettivo h tale che, considerati $p_1, \ldots, p_n \in P$, se $f^Q(h(p_1), \ldots, h(p_n))$ esiste, allora deve esistere anche $f^P(p_1, \ldots, p_n)$ e deve valere $h(f^P(p_1, \ldots, p_n)) = f^Q(h(p_1), \ldots, h(p_n))$.

Definizione A.37

Se (s, t) è un'equazione nel linguaggio di un'algebra parziale $\mathscr{P}$, diremo che $\mathscr{P} \vDash s = t$ se, supponendo $s = s(x_1, \ldots, x_n)$ e $t = t(x_1, \ldots, x_n)$, per ogni $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in P$ vale la seguente proprietà:

se $s(p_1, \ldots, p_n)$ e $t(q_1, \ldots, q_n)$ sono definiti, allora $s(p_1, \ldots, p_n) = t(q_1, \ldots, q_n)$.

Definizione A.38

Diremo che una classe di algebre (totali) $\mathcal{K}$ ha la **proprietà dell'immersione finita** (**FEP**) se ogni algebra parziale finita $\mathscr{P}$ che sia immergibile in un'algebra in $\mathcal{K}$ è anche immergibile in un'algebra finita in $\mathcal{K}$.

Definizione A.39

Una classe di algebre $\mathcal{K}$ ha la **FEP**$^+$ se ogni algebra parziale $\mathscr{P}$ finita che sia immergibile pienamente in un'algebra in $\mathcal{K}$ è anche immergibile pienamente in un'algebra finita in $\mathcal{K}$.

Notiamo che se $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$ e $\mathscr{P}$ si immerge pienamente in $\mathscr{Q}$, per identificare $\mathscr{P}$ basta conoscere il suo dominio, poiché se $p_1, \ldots, p_n \in P$ allora

$$f^P(p_1, \ldots, p_n) \text{ è definita } \text{ se e soltanto se } f^Q(p_1, \ldots, p_n) \in P.$$

Teorema A.40

Se una classe di algebre ha la FEP$^+$, allora ha anche la FEP. Se inoltre una classe di algebre ha un numero finito di operazioni allora FEP implica FEP$^+$.

Dimostrazione. Supponiamo che una classe $\mathcal{K}$ di algebre abbia la *FEP*$^+$. Prendiamo $\mathscr{P}$ algebra parziale finita immergibile in qualche algebra $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$. Consideriamo l'algebra parziale $\mathscr{P}^+$ costruita partendo da $\mathscr{P}$ in modo che, per ogni $p_1, \ldots, p_n \in P$, se $f^A(p_1, \ldots, p_n)$ esiste ed appartiene a P

$$f^{P^+}(p_1, \ldots, p_n) \coloneqq f^A(p_1, \ldots, p_n).$$

Allora, banalmente, $\mathscr{P}^+$ è pienamente immergibile in $\mathscr{A}$ e quindi, per la FEP^+, esiste un'algebra finita $\mathscr{B}$ tale che $\mathscr{P}^+$ si immerge pienamente in $\mathscr{B}$. Ma allora $\mathscr{P}$ si immerge in $\mathscr{B}$. Quindi $\mathcal{K}$ ha la FEP.

Per il viceversa, supponiamo che una classe $\mathcal{K}$ di algebre abbia la FEP e abbia un numero finito di operazioni. Sia $\mathscr{P}$ un'algebra parziale finita pienamente immergibile in $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$. Consideriamo l'algebra parziale $\mathscr{Q}$ definita da

$$\mathscr{Q} \coloneqq \mathscr{P} \cup \{f^A(p_1, \ldots, p_n) \mid f \in F,\ \rho(f) = n,\ p_1, \ldots, p_n \in P\}.$$

Notiamo che $\mathscr{Q}$ è finita perché $\mathcal{K}$ ha un numero finito di operazioni. L'algebra $\mathscr{Q}$ è ancora immergibile in $\mathscr{A}$, dunque per la FEP deve esistere un'algebra finita $\mathscr{B} \in \mathcal{K}$ tale che $\mathscr{Q}$ si immerge in $\mathscr{B}$, cioè esiste $\varphi\colon \mathscr{Q} \rightarrowtail \mathscr{B}$ tale che $\varphi_{\restriction \mathscr{P}}\colon \mathscr{P} \rightarrowtail \mathscr{B}$. Per vedere che $\varphi_{\restriction P}$ è piena basta mostrare che $\varphi[P]$ è una sottoalgebra piena di $\mathscr{B}$ dove

$$f^{\varphi[P]}(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)) = \varphi(f^P(p_1, \ldots, p_n))$$

quando $f^P(p_1, \ldots, p_n)$ esiste.

Devo dunque mostrare che, se $p_1, \ldots, p_n \in P$ e $f^B(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)) \in \varphi[P]$, allora $f^{\varphi[P]}(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n))$ esiste e

$$f^{\varphi[P]}(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)) = f^B(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)).$$

Se $p_1, \ldots, p_n \in P$ allora, per definizione di $\mathscr{Q}$, si ha che $f^A(p_1, \ldots, p_n) \in Q$, inoltre, dato che $\mathscr{P}$ è pienamente immergibile in $\mathscr{A}$, $f^P(p_1, \ldots, p_n)$ esiste e vale $f^P(p_1, \ldots, p_n) = f^A(p_1, \ldots, p_n)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} f^{\varphi[P]}(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)) &= \varphi(f^P(p_1, \ldots, p_n)) = \varphi(f^A(p_1, \ldots, p_n)) = \\ &= \varphi(f^Q(p_1, \ldots, p_n)) = f^B(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)). \end{aligned}$$

$\square$

In generale (cioè quando ci sono infinite operazioni) $FEP \not\Rightarrow FEP^+$. Ad esempio per i campi l'implicazione non vale.

Vedremo più avanti come questa proprietà si collegata alle algebre finitamente presentate di cui abbiamo parlato prima e alle quasi-equazione di cui si parla nella sezione seguente.

A.6 QUASI EQUAZIONI E PROPRIETÀ DEL MODELLO FINITO

Definizione A.41

Se $\mathscr{P}$ è un'algebra, un'**assegnazione** (anche detta **interpretazione**) è una funzione $u\colon X \Rightarrow \mathscr{P}$. Essa si estende univocamente a un omomorfismo $\widetilde{u}\colon \mathscr{F}(\mathscr{X}) \Rightarrow \mathscr{P}$.

Definizione A.42

Una **quasi-equazione** è una formula del tipo

$$(s_1 = t_1 \wedge s_2 = t_2 \wedge \cdots \wedge s_n = t_n \to s = t).$$

Esiste una variante del teorema di Birkhoff che afferma che

"Una classe di algebre $\mathcal{K}$ è assiomatizzabile tramite quasi-equazioni se e solo se $\mathcal{K} = \mathbb{I}\,\mathbb{S}\,\mathbb{P}\,\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ (cioè se è una quasi-varietà)."

dove $\mathbb{I}(\mathcal{K})$ indica la classe di algebre isomorfe ad algebre in $\mathcal{K}$ e $\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ la classe di algebre isomorfe ad ultra-prodotti di algebre in $\mathcal{K}$.

Definizione A.43

Una classe di algebre $\mathcal{K}$ ha la **proprietà del modello finito** (**FMP**) se ogni equazione che fallisce in $\mathcal{K}$, fallisce in qualche algebra finita in $\mathcal{K}$.

Definizione A.44

Una classe di algebre $\mathcal{K}$ ha la **proprietà forte del modello finito** (**SFMP**) se ogni quasi-equazione che fallisce in $\mathcal{K}$, fallisce in qualche algebra finita in $\mathcal{K}$.

Vediamo ora come SFMP e FEP sono collegate. Prima è necessario fare un paio di osservazioni.

Lemma A.45. *Se $\varphi\colon \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ è un omomorfismo di algebre parziali e $v\colon X \to P$ è un'assegnazione, considerata $\varphi \circ v\colon X \to Q$, allora le rispettive estensioni a omomorfismi da $F(X)$ soddisfano: $\widetilde{\varphi \circ v} = \varphi \circ \widetilde{v}$, ovvero*

$$\widetilde{\varphi \circ v}(s) = \varphi \circ \widetilde{v}(s) \quad \forall\, s \in F(X).$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla complessità dei termini.

Se $s = x$ è una variabile allora l'asserto è banale

$$\widetilde{\varphi \circ v}(x) = \varphi \circ v(x) = \varphi \circ \widetilde{v}(x).$$

Supponiamo ora che l'asserto sia vero per tutti i termini di complessità n e sia $s = f(t_1, \dots, t_n)$ un termine di complessità $n + 1$, allora

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi \circ v}(f(t_1, \dots, t_n)) &= f(\widetilde{\varphi \circ v}(t_1), \dots, \widetilde{\varphi \circ v}(t_n)) = \\ &= f(\varphi \circ \widetilde{v}(t_1), \dots, \varphi \circ \widetilde{v}(t_n)) = \\ &= \varphi \circ \widetilde{v}(f(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

□

Definizione A.46

Sia $\mathscr{P}$ un'algebra finita. Allora, fissata una funzione $\widehat{\ }\colon P \rightarrowtail X$ iniettiva, definiamo

$$Diag\mathscr{P} := \{f(\widehat{p_1}, \dots, \widehat{p_n}) = \widehat{p} \mid f \in F,\ p_1, \dots, p_n \in P,\ f^P(p_1, \dots, p_n) = p\}.$$

Teorema A.47

Sia $\mathcal{K}$ una classe di algebre di tipo finito e chiusa per prodotti finiti. Allora le seguenti sono equivalenti:

1. *$\mathcal{K}$ ha la FEP;*
2. *$\mathcal{K}$ ha la FEP$^+$;*
3. *$\mathcal{K}$ ha la SFMP.*

Dimostrazione. Proviamo le implicazioni.

$\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Vale per il teorema A.40.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Supponiamo che $\mathcal{K}$ abbia la FEP^+ e sia q una quasi-equazione che fallisce in $\mathcal{K}$. Sia $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ e $v\colon X \to A$ un'assegnazione tale che $\widetilde{v}(q)$ non è vera in $\mathscr{A}$.

Definiamo

$$\mathscr{B} := \{\widetilde{v}(w) \mid w \text{ è un termine che compare in } q\}.$$

Sia $\mathscr{P}$ la sottoalgebra piena di $\mathscr{A}$ data dal sottoinsieme B. Poiché $\mathcal{K}$ ha la FEP^+, $\mathscr{P}$ si immerge pienamente in qualche algebra finita $\mathscr{C} \in \mathcal{K}$ con un'immersione $\varphi\colon \mathscr{P} \to \mathscr{C}$. Supponiamo che q sia della forma

$$t_1 = t_1' \wedge t_2 = t_2' \wedge \cdots \wedge t_n = t_n' \to t = t'.$$

Sappiamo che $\widetilde{v}(t_1) = \widetilde{v}(t_1'), \ldots, \widetilde{v}(t_n) = \widetilde{v}(t_n')$ e $\widetilde{v}(t) \neq \widetilde{v}(t')$. Sia $u = \varphi \circ v$, allora, per ogni $1 \leq i \leq n$,

$$\widetilde{u}(t_i) = \varphi \circ \widetilde{v}(t_i) = \varphi \circ \widetilde{v}(t_i') = \widetilde{u}(t_i')$$

Ma, poiché φ è iniettiva,

$$\widetilde{u}(t) = \varphi \circ \widetilde{v}(t) \neq \varphi \circ \widetilde{v}(t') = \widetilde{u}(t')$$

Dunque u è un'assegnazione da X in C che falsifica q.

$\boxed{3. \Rightarrow 1.}$ Supponiamo che $\mathcal{K}$ abbia la $SFMP$. Prendiamo $\mathscr{B}$ algebra parziale finita tale che $\mathscr{B} \leq \mathscr{A} \in \mathcal{K}$. Fissiamo una funzione $\widehat{\ }\colon B \rightarrowtail X$ iniettiva. Consideriamo $\&Diag\mathscr{B}$, cioè la congiunzione di tutte le equazioni in $Diag\mathscr{B}$. Per ogni $b, b' \in B$ con $b \neq b'$ consideriamo inoltre la quasi-equazione

$$q_{b,b'} := (\&Diag\mathscr{B} \to \widehat{b} = \widehat{b'}).$$

Prendiamo l'assegnazione $v\colon X \to A$ definita da $v(\widehat{b}) = b$.

Notiamo che $A, v \vDash \&Diag\mathscr{B}$, infatti se $f(\widehat{b_1}, \ldots, \widehat{b_n}) = \widehat{b} \in Diag\mathscr{B}$, allora vale $f^B(b_1, \ldots, b_n) = b$ e si ha

$$\begin{aligned} \widetilde{v}(f(\widehat{b_1}, \ldots, \widehat{b_n})) = f^A(v(\widehat{b_1}), \ldots, v(\widehat{b_n})) = f^A(b_1, \ldots, b_n) = \\ = f^B(b_1, \ldots, b_n) = b = v(\widehat{b}). \end{aligned}$$

Concludiamo che $A, v \vDash f(b_1, \ldots, b_n)$ per ogni $(f(b_1, \ldots, b_n)) \in Diag\mathscr{B}$. Osserviamo anche che $A, v \nvDash \widehat{b} = \widehat{b'}$ perché

$$v(\widehat{b}) = b \neq b' = v(\widehat{b'}).$$

Quindi per ogni quasi-equazione $q_{b,b'}$ esiste un'algebra $\mathscr{A} \in \mathcal{K}$ tale che $A \nvDash q_{b,b'}$. Dunque $\mathcal{K} \nvDash q_{b,b'}$ per ogni $b, b' \in B$ tale che $b \neq b'$.

Poiché $\mathcal{K}$ ha la $SFMP$ devono esistere algebre finite $C_{b,b'} \in \mathcal{K}$ tali che $C_{b,b'} \nvDash q_{b,b'}$ per ogni $b, b' \in B$ con $b \neq b'$.

Vogliamo immergere $\mathscr{B}$ in un prodotto delle algebre $C_{b,b'}$. Allora per ogni $b, b' \in B$ con $b \neq b'$ consideriamo l'assegnazione $\omega_{b,b'}\colon X \to C_{b,b'}$ tale che $C_{b,b'}, \omega \nvDash q_{b,b'}$. Definiamo un omomorfismo $\varphi_{b,b'}\colon B \to C_{b,b'}$ dato da

$$\varphi_{b,b'}(a) = \omega_{b,b'}(\widehat{a}) \quad \forall a \in B.$$

Questo è un omomorfismo perché se $f \in F$ con $\rho(f) = n$ e $b_1, \dots, b_n, a \in B$ sono tali che $f^B(b_1, \dots, b_n) = a$, allora $(f(\widehat{b_1}, \dots, \widehat{b_n}) = \widehat{a}) \in Diag\mathscr{B}$. Dunque

$$\begin{aligned}\varphi_{b,b'}(f^B(b_1, \dots, b_n)) = \varphi_{b,b'}(a) = \omega_{b,b'}(\widehat{a}) &= \widetilde{\omega_{b,b'}}(f(\widehat{b_1}, \dots, \widehat{b_n})) = \\ &= f^{C_{b,b'}}(\omega_{b,b'}(\widehat{b_1}), \dots, \omega_{b,b'}(\widehat{b_n})) = \\ &= f^{C_{b,b'}}(\varphi_{b,b'}(b_1), \dots, \varphi_{b,b'}(b_n)).\end{aligned}$$

Poiché abbiamo individuato degli omomorfismi da $\mathscr{B}$ in ogni $C_{b,b'}$ con $b \neq b'$, deve esistere un omomorfismo $\varphi \colon \mathscr{B} \to \prod_{b \neq b'} C_{b,b'}$ tale che, dette $\pi_{b,b'} \colon \prod_{b \neq b'} C_{b,b'} \to C_{b,b'}$ le proiezioni,

$$\pi_{b,b'} \circ \varphi = \varphi_{b,b'} \quad \forall b, b' \in B \quad b \neq b'$$

definito da $\varphi(a) := (\varphi_{b,b'}(a) \mid b \neq b')$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{B} \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_{b,b'}"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_{d,d'}"] & \\
& \prod_{b \neq b'} C_{b,b'} \arrow[dl, "\pi_{b,b'}"'] \arrow[dr, "\pi_{d,d'}"] & \\
C_{b,b'} & \cdots & C_{d,d'}
\end{tikzcd}$$

Si noti che φ è un omomorfismo da $\mathscr{B}$ in un'algebra finita $\prod_{b \neq b'} C_{b,b'}$, quindi per provare la tesi rimane da verificare che φ sia iniettiva. In effetti, se $c \neq c'$,

$$\varphi(c) = (\varphi_{b,b'}(c) \mid b \neq b') \neq (\varphi_{b,b'}(c) \mid b \neq b') = \varphi(c')$$

poiché $\varphi_{c,c'}(c) \neq \varphi_{c,c'}(c')$.

$\square$

A.7 relazioni tra fmp, sfmp e algebre finitamente presentate

Ricordiamo che un'algebra $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ è liberamente generata da un insieme X di variabili se, per ogni algebra $\mathscr{B}$, ogni funzione da X in B si estende univocamente a un omomorfismo da $\mathscr{F}(\mathscr{X})$ in $\mathscr{B}$.

Notiamo ora che è possibile modificare la definizione sostituendo all'insieme X delle variabili un'algebra parziale $\mathscr{P}$.

Definizione A.48

Sia $\mathscr{P}$ un'algebra parziale. Diremo che $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ è una $\mathscr{P}$-algebra liberamente generata se, per ogni algebra $\mathscr{B}$, ogni omomorfismo da $\mathscr{P}$ in $\mathscr{B}$ si estende univocamente a un omomorfismo da $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ in $\mathscr{B}$.

Si possono dimostrare i seguenti risultati.

Lemma A.49. *Sia V una varietà di algebre, $\mathscr{P}$ un'algebra parziale immergibile in qualche algebra in V e $\widehat{\ }\colon P \to X$ una funzione iniettiva. Allora l'algebra finitamente presentata $\langle X, \mathrm{Diag}\,\mathscr{P}\rangle$, insieme alla mappa $\nu\colon \mathscr{P} \to \langle X, \mathrm{Diag}\,\mathscr{P}\rangle$ definita da $\nu(p) = [\widehat{p}]$ è la $\mathscr{P}$-algebra liberamente generata.*

Lemma A.50. *Se V è una varietà di algebre in un linguaggio finito, le seguenti sono equivalenti:*

1. *A è finitamente presentabile in V;*
2. *A è una $\mathscr{P}$-algebra liberamente generata per qualche algebra parziale $\mathscr{P}$.*

Osservazione A.51. Si noti che se V è una varietà di algebre e $\mathscr{P}$ un'algebra parziale, allora $\mathscr{P}$ è immergibile in un'algebra in V se e solo se $\mathscr{P}$ si immerge in $\mathscr{F}(\mathscr{P})$.

Definizione A.52

Un'algebra è detta **finitamente residuata** se è decomponibile come prodotto sottodiretto di algebre finite.

Teorema A.53

Sia V una varietà, le seguenti sono equivalenti:

1. *V ha la FMP;*
2. *tutte le algebre libere in V sono residuamente finite;*
3. *$F(\omega)$, cioè l'algebra liberamente generata da ω generatori, è residualmente finita per ogni ω.*

Teorema A.54

Sia V una varietà, le seguenti sono equivalenti:

1. *V ha la SFMP;*
2. *tutte le algebre finitamente presentate in V sono residualmente finite;*
3. *ogni algebra parziale finita immergibile in una finitamente presentata è immergibile in un'algebra finita.*

Teorema A.55

Se V è una varietà assiomatizzata da un insieme finito di equazioni, in cui ogni algebra finitamente presentata è residualmente finita, allora V ha un problema della parola risolvibile.

A.8 cloni, termini, classi equazionali

Notazione A.56. Sia A un'insieme, denotiamo con $Op_n(A)$ l'insieme delle di tutte le funzioni (operazioni) n-arie su A. Quindi $Op_n(A) = A^{A^n} = \{f\colon A^n \to A\}$.
Chiamiamo inoltre $Op(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Op_n(A)$.

Osservazione A.57. Notiamo $\forall\, k \leq n$ c'è sempre un operazione $p_k^n(a_1, \dots, a_n) = a_k$ che chiamiamo k-esima proiezione. Indicheremo con $Proj(A) := \{p_k^n \mid k \leq n \text{ con } k, n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle proiezioni su A.

Definizione A.58

Siano $n, k \in \mathbb{N}$, $f \in Op_n(A)$ e $g_1, \dots, g_n \in Op_k(A)$, allora è possibile definire l'operazione k-aria

$$f[g_1, \dots, g_n](x_1, \dots, x_k) := f(g_1(x_1, \dots, x_k), g_2(x_1, \dots, x_k), \dots, g_n(x_1, \dots, x_k))$$

chiamata **composizione generalizzata**.

Se, ad esempio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g_1, g_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la funzione $f[g_1, g_2]\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valutata su un generico elemento $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ darà come risultato $f(g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3))$. Analizziamo ora un caso limite. Se f è 0-aria e k è un numero naturale arbitrario, posso comporre f con 0 operazioni k-arie per ottenere un'operazione k-aria. Ma dire che f è 0-aria vuol dire che f è costante, quindi posso vedere ogni costante c come un'operazione k-aria che mappa $(x_1, \dots, x_k) \mapsto c$ (con k arbitrario).

Definizione A.59

Sia A un'insieme non vuoto. Chiameremo **clone** su A un qualsiasi sottoinsieme di $Op(A)$ che

1. contiene tutte le proiezioni,

2. è chiuso per composizione generalizzata.

Si osservi che sia $Op(A)$ che $Proj(A)$ sono cloni su A. Infatti componendo proiezioni si ha $p^n_k[p^m_{i_1}, \dots, p^m_{i_n}](x_1, \dots, x_m) = p^n_k(p^m_{i_1}(\overline{x}), \dots, p^m_{i_m}(\overline{x})) = p^m_{i_k}(\overline{x})$. Inoltre $Op(A)$ e $Proj(A)$ sono rispettivamente il più grande e il più piccolo clone su A.

Esempio A.60. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_n]$ delle funzioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, cioè quelle del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ per $i \leq n$. Mostriamo che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_n]$ è un clone su $\mathbb{R}$. Osserviamo che tutte le proiezioni sono descrivibili come funzioni di questo tipo perché la proiezione sulla componente k-esima è data dal polinomio x_k (visto come un polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_n$). Inoltre $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_n]$ è chiuso per composizione generalizzata. Consideriamo infatti $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_n]$ e $p_1(x_1, \dots, x_k), \dots, p_n(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_k]$, allora

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_n)[p_1(x_1, \dots, x_k), \dots, p_n(x_1, \dots, x_k)](q_1, \dots, q_k) = \\
&= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)[p_1(x_1, \dots, x_k), \dots, p_n(x_1, \dots, x_k)](q_1, \dots, q_k) = \\
&= (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)(p_1(q_1, \dots, q_k), \dots, p_n(q_1, \dots, q_k)) = \\
&= a_1 \cdot p_1(q_1, \dots, q_k) + \cdots + a_n \cdot p_n(q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_k].
\end{aligned}$$

Quindi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{\text{lin}}[x_1, \dots, x_n]$ è un clone su $\mathbb{R}$. Similmente le funzioni del tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ con $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ formano un clone su $\mathbb{R}$. Un ulteriore esempio di clone su $\mathbb{R}$ è dato dai *polinomi* a coefficienti in $\mathbb{Z}$

Definizione A.61

L'intersezione di cloni su un insieme è ancora un clone, quindi possiamo definire per $F \subseteq Op(A)$ il **clone generato** da F come

$$\mathtt{Clo}^A(F) := \bigcap \{c | c \text{ clone su } A \text{ e } F \subseteq C\}.$$

Si vede facilmente che $\mathtt{Clo}^A(-)$ è un operatore di chiusura che induce il reticolo (completo) dei cloni su un insieme A, indicato con $\mathscr{L}_{\mathtt{Clo}^A}$. Definiamo anche $\mathtt{Clo}^A_n(F) := \mathtt{Clo}^A(F) \cap Op_n(A)$.

Teorema A.62

Sia A un insieme e $F \subseteq Op(A)$. Definiamo:

$$F_0 := F \cup Proj(A)$$
$$F_{n+1} := F_n \cup \{f[g_1, \ldots, g_n] \mid f \in F,\ g_1, \ldots, g_n \in F_n \cap Op_k(A) \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}.$$

Allora $\mathtt{Clo}^A(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Dimostrazione. Chiamiamo $\overline{F} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Per induzione proviamo che $F_n \subseteq \mathtt{Clo}^A(F)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per il passo base si osserva che $F_0 = Proj(A) \subseteq \mathtt{Clo}^A(F)$. Per il passo induttivo basta osservare che se $f[g_1, \ldots, g_n] \in F_{n+1} \setminus F_n$ allora poiché $g_1, \ldots, g_n \in F_n \subseteq \mathtt{Clo}^A(F)$ e $f \in F$, la composizione generalizzata $f[g_1, \ldots, g_n] \in \mathtt{Clo}^A(F)$ per la proprietà 2. di un clone. Dunque $\overline{F} \subseteq \mathtt{Clo}^A(F)$.

Per l'inclusione opposta è sufficiente mostrare che $\overline{F}$ è un clone contenente F. Ma poiché $F_0 \subseteq \overline{F}$, $\overline{F}$ contiene tutte le proiezioni. Inoltre per ogni $f \in F$ di arietà k, abbiamo $f = f[p_1^k, \ldots, p_k^k] \in F_1 \subseteq \overline{F}$. Resta da dimostrare che $\overline{F}$ è chiuso per composizione generalizzata. In particolare proviamo che se $f \in F_n$ e $g_1, \ldots, g_k \in F_m$ sono della stessa arietà, allora $f[g_1, \ldots, g_k] \in F_{n+m}$. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$ considero $f \in F_0$ (quindi f è una proiezione) e $g_1, \ldots, g_k \in F_m$; allora $f[g_1, \ldots, g_k] = g_i$ per qualche $i \leq k$. Dunque $f[g_1, \ldots, g_k] \in F_{0+m} = F_m$. Per il passo induttivo consideriamo $f \in F_{n+1} \setminus F_n$. Allora devono esistere $f_1 \in F$ di arietà t e $h_1, \ldots, h_t \in F_n$ tali che $f = f_1[h_1, \ldots, h_t]$. Notiamo che l'arietà delle h_j per $j \leq t$ deve essere uguale a quella di f. Se prendiamo $g_1, \ldots, g_k \in F_m$, per ipotesi induttiva $h_i' := h_i[g_1, \ldots, g_k] \in F_{n+m}$. Ma $f[g_1, \ldots, g_k] = (f_1[h_1, \ldots, h_t])[g_1, \ldots, g_k] = f_1[h_1', \ldots, h_t'] \in F_{n+1+m}$. □

Osservazione A.63. Il reticolo dei cloni di un insieme A, $\mathscr{L}_{\mathtt{Clo}^A}$ è algebrico. Equivalentemente $\mathtt{Clo}^A(F) = \bigcup\{\mathtt{Clo}^A(K) \mid K \subseteq_{\text{fin}} F\}$.

Osservazione A.64. Sia A è un insieme e F un qualsiasi insieme di operazioni su A. Definendo

$$G_0 := \{p_1^k, p_2^k, \ldots, p_k^k\}$$
$$G_{n+1} := G_n \cup \{f[g_1, \ldots, g_l] \mid f \in F,\ g_1, \ldots, g_l \in G_n\}$$

si ha che $\mathtt{Clo}_k^A(F) = \bigcup_{n \in N} G_n$.
Per provare che ciò è vero basta dimostrare per induzione su n che

$$G_n = F_n \cap Op_k(A).$$

Esempio A.65. Sia $A = \mathbb{Q}$ e $F = \{+, -, \cdot 1\}$. Troviamo $\mathtt{Clo}_2^{\mathbb{Q}}(F)$.

$$\begin{aligned}
G_0 &= \{p_1^2, p_2^2\} \cong \{x, y\} \\
G_1 &= G_0 \cup \{x+y, x+x, y+y, -x, -y, x \cdot y, x \cdot x, y \cdot y\} \\
&= \{2x, 2y, -x, -y, x^2, y^2, x+y, xy, 1, x, y\} \\
G_2 &= G_1 \cup \{xy + 2x, x^2 - x, 2y(x+y), x - x = 0, 1 + 1 = 2, \dots\} \\
&\vdots \\
G_n &= \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

È facile intuire che

$$\mathtt{Clo}_2^{\mathbb{Q}}(F) = \mathbb{Z}[x, y]$$

Definizione A.66

Dato un insieme A e un insieme di operazioni su A, F, definiamo $Pol^A(F) = \mathtt{Clo}^A(F \cup A^0)$, dove A^0 è l'insieme delle operazioni 0-arie. Analogamente definiamo $Pol_n^A(F) := \mathtt{Clo}_n^A(F \cup A^0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione A.67. Se $A = \mathbb{Q}$ e $F = \{+, -, \cdot 1\}$

$$Pol_2^{\mathbb{Q}}(F) = \mathbb{Q}[x, y].$$

Definizione A.68

Se $\mathscr{A} = (A, \mathcal{F})$ è un'algebra, chiameremo **clone delle operazioni definibili** l'insieme $\mathtt{Clo}^A(\mathcal{F})$ e lo indicheremo con

$$\mathtt{Clo}(\mathscr{A}) := \mathtt{Clo}^A(\mathcal{F}).$$

Similmente chiameremo **clone dei polinomi** su $\mathscr{A}$ l'insieme $Pol^A(\mathcal{F})$ e lo indicheremo con

$$Pol(\mathscr{A}) := Pol^A(\mathcal{F}).$$

Inoltre chiamiamo $\mathtt{Clo}_n(\mathscr{A}) := \mathtt{Clo}_n^A(\mathcal{F})$ e $Pol_n(\mathscr{A}) := Pol_n^A(\mathcal{F})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Osservazione A.69. Spesso non c'è differenza nel considerare un'algebra $(A, \mathcal{F})$ oppure un'algebra $(A, \mathtt{Clo}^A(F))$.

Esempio A.70. Sia $\mathbb{2} := \{\{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1\}$. Osserviamo che per il teorema di completezza funzionale $\mathtt{Clo}(\mathbb{2}) = Op(\mathbb{2})$.

Teorema A.71

Per ogni algebra $\mathscr{A}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathtt{Clo}_n(\mathscr{A})$ è il sottouniverso dell'algebra $\mathscr{A}^{(A^n)}$ generato dalle proiezioni $p_1^n, p_2^n, \dots, p_n^n$. $Pol_n(\mathscr{A})$ è il sottouniverso generato dalle proiezioni $p_1^n, \dots, p_n^n$ e da tutte le operazioni costanti su A.

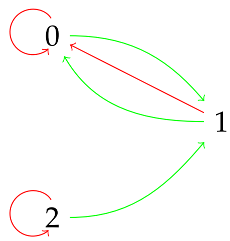
Dimostrazione. Ricordiamo il teorema 1.19 e compariamolo con la caratterizzazione A.62. Osserviamo quindi che è sufficiente dimostrare che

$$f^{\mathscr{A}^{A^n}}(g_1, \dots, g_k) = f[g_1, \dots, g_k].$$

In effetti $f^{\mathscr{A}^{A^n}}(g_1, \dots, g_k)(\bar{a}) = f^{\mathscr{A}^{A^n}}(g_1(\bar{a}, \dots, g_k(\bar{a}).$ □

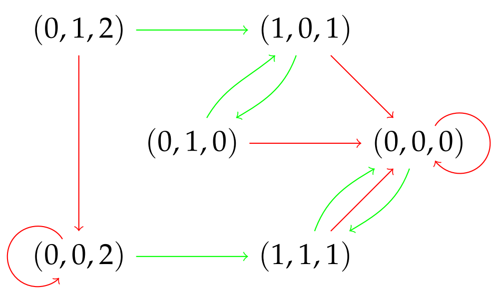
Esempio A.72. Consideriamo un'algebra $(A, \{f, g\})$ dove $A = \{0,1,2\}$. Siano f, g operazioni unarie, definite dalla seguente tabella:

	f	g
0	0	1
1	0	0
2	2	1



Vogliamo capire com'è fatto $\mathtt{Clo}(\mathscr{A}) \leq \mathscr{A}^{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$.
osserviamo che se h è un'operazione unaria su A, è possibile rappresentarla come una terna $(h(0), h(1), h(2))$.

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad p_1^1 &= (0,1,2) \\ f &= (0,0,2) \\ g &= (1,0,1) \\ g[f] = g \circ f &= (1,1,1) \\ &\vdots \end{aligned}$$



Nella figura precedente le terne rappresentano tutte le operazioni in $\mathtt{Clo}_1(\mathscr{A})$, mentre le frecce verdi e rosse rappresentano rispettivamente la composizione con f e con g.

Osserviamo che, partendo dall'algebra $\mathscr{A}$ con due operazioni unarie, abbiamo ottenuto (costruendo $\mathtt{Clo}_1(\mathscr{A})$) un'algebra dello stesso tipo.

Esercizio A.73. Sia $\mathscr{A} = (\{0,1,2\}, \cdot)$ con $\cdot$ operazione binaria definita da:

	0	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

1. Determinare $\mathtt{Clo}_n(A)$ per $n \leq 3$.
2. Mostrare che $\mid \mathtt{Clo}_n(\mathscr{A}) \mid = n + 2^n - 1$.

A.9 RELAZIONI INVARIANTI

Definizione A.74

Sia A un insieme, $f \in Op_n(A)$ e $\theta \in Rel_k(A)$, cioè θ relazione k-aria su A. Diremo che f **preserva** θ, in simboli $f \mid: \theta$ se vale la seguente proprietà. Se

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k}), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}) \in \theta$$

allora

$$(f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k}), f(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k}), \dots, f(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk})) \in \theta.$$

Diremo anche che θ è **invariante** per f.

La definizione diventa più semplice con la notazione matriciale:

$$\begin{array}{ccccc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} & \in \theta \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} & \in \theta \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} & \in \theta \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & \\
a_1 & a_2 & \dots & a_k & \in \theta
\end{array}$$

Lemma A.75. *Sia θ una relazione k-aria e f un'operazione, entrambe su A. Allora f preserva θ se e solo se θ è un sottouniverso dell'algebra $(A, f)^k$.*

Dimostrazione. Sia $\overline{x_i} := (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ per $i = 1, \dots, n$.
Dire che θ è un sottouniverso di $(A, f)^k$ è equivalente a dire che se $\overline{x_i} \in \theta$ allora $f^{A^k}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) \in \theta$. Ma

$$f^{A^k}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = (f^A(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}), f^A(x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}), \dots, f^A(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})).$$

□

Definizione A.76

La relazione $|:$ si può estendere a insiemi. Se $F \subseteq Op(A)$ e $\Theta \subseteq Rel(A)$ allora scriviamo

$$F \,|:\, \Theta \iff \forall\, f \in F \text{ e } \forall\, \theta \in \Theta \quad f \,|:\, \theta$$

Definizione A.77

Se $F \subseteq Op(A)$ e $\Theta \in Rel(A)$ definiamo

$$\mathcal{R}(F) := \{\sigma \in Rel(A) \mid F \,|:\, \sigma\}$$

$$\mathcal{F}(\Theta) := \{g \in Op(A) \mid g \,|:\, \Theta\}.$$

Gli elementi di $\mathcal{R}(F)$ sono detti **invarianti sotto** F, mentre gli elementi di $\mathcal{F}(\Theta)$ sono detti **polimorfismi** di Θ.

Notiamo che gli operatori $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ sono definiti come $^{\triangleright}$ e $^{\triangleleft}$ rispetto alla relazione $|:$. Infatti

$$\mathcal{R}(F) := \{\sigma \in Rel(A) \mid f \,|:\, \sigma\ \forall f \in F\} = F^{\triangleright}$$

$$\mathcal{F}(\Theta) := \{g \in Op(A) \mid g \,|:\, \theta\ \forall \theta \in \Theta\} = \Theta^{\triangleleft}.$$

Ne deriva immediatamente che $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}$ formano una connessione di Galois e dunque che $\mathcal{R} \circ \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{R}$ sono due operatori di chiusura. Vediamo ora chi sono i chiusi rispetto a questi operatori di chiusura.

Teorema A.78

Per ogni insieme A e $\Theta \subseteq Rel(A)$ si ha che $\mathcal{F}(\Theta)$ è un clone. Inoltre se A è finito, tutti i cloni hanno questa forma.

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che le proiezioni preservano qualsiasi relazione. Consideriamo quindi la proiezione i-esima di arietà n p_i^n e una relazione k-aria $\theta \in Rel_k(A)$. Siano inoltre $\overline{x_l} := (x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lk}$ per $l \leq n$ e $\widehat{x_j} := (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$ per $j \leq k$. Supponiamo che $\overline{x_l} \in \theta$ per ogni $l \leq n$, allora

$$(p_i^n(\widehat{x_1}), p_i^n(\widehat{x_2}), \dots, p_i^n(\widehat{x_k})) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) = \overline{x_i} \in \theta$$

Infatti $p_i^n(\widehat{x_j}) = p_i^n(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) = x_{ij}$ per ogni $j \leq k$. Ne concludiamo che tutte le proiezioni appartengono a $\mathcal{F}(\Theta)$.

Rimane da mostrare che $\mathcal{F}(\Theta)$ è chiuso per composizione generalizzata. Prendiamo dunque $f, g_1, \dots, g_t \in \mathcal{F}(\Theta)$ con f di arietà t e $g_1, \dots, g_t$ di arietà n. Sia $\theta \in \Theta$ con $\theta \subseteq A^k$. Supponiamo che $\overline{x_i} = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in \theta$ per $i \leq n$. Poiché $g_1, \dots, g_t$ e f preservano θ si ha:

$$
\begin{array}{ccccc}
g_1(\widehat{x_1}) & g_1(\widehat{x_2}) & \dots & g_1(\widehat{x_k}) & \in \theta \\
g_2(\widehat{x_1}) & g_2(\widehat{x_2}) & \dots & g_2(\widehat{x_k}) & \in \theta \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
g_t(\widehat{x_1}) & g_t(\widehat{x_2}) & \dots & g_t(\widehat{x_k}) & \in \theta \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & \\
f(g_1(\widehat{x_1}), \dots, g_t(\widehat{x_1})) & f(g_1(\widehat{x_2}), \dots, g_t(\widehat{x_2})) & \dots & f(g_1(\widehat{x_k}), \dots, g_t(\widehat{x_k})) & \in \theta \\
\parallel & \parallel & \dots & \parallel & \\
f[g_1, \dots, g_t]\widehat{x_1} & f[g_1, \dots, g_t]\widehat{x_2} & \dots & f[g_1, \dots, g_t]\widehat{x_k} & \in \theta
\end{array}
$$

Abbiamo ottenuto che $f[g_1, \dots, g_t]$ preserva θ. Quindi $\mathcal{F}(\Theta)$ contiene tutte le proiezioni ed è chiuso per composizione generalizzata, cioè è un clone.

Proviamo ora la seconda parte dell'enunciato. Consideriamo A finito, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere $A^n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_{t(n)}^n\}$. Sia $\mathcal{C}$ un clone su A e sia $\mathcal{C}_{(n)} = \mathcal{C} \cap Op_n(A)$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $g \in \mathcal{C}_{(n)}$ definiamo

$$\widehat{g} := (g(a_1^n), g(a_2^n), \dots, g(a_{t(n)}^n)) \quad \text{e} \quad \theta_n := \{\widehat{g} \mid g \in \mathcal{C}_{(n)}\} \subseteq A^{t(n)}.$$

Dimostriamo che $\mathcal{C} = \mathcal{F}(\{\theta_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

$\boxed{\subseteq}$ Sia $f \in \mathcal{C}_{(k)}$, dimostriamo che $f \in \mathcal{F}(\{\theta_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo $\overline{x_i} := (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{it(n)}) \in \theta_n$ per $i \leq k$. Allora, per definizione di θ_n, esistono $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}_{(n)}$ tali che $\overline{x_i} = \widehat{g_i}$ per ogni $i \leq k$. Vogliamo provare che

$$
\begin{aligned}
&(f(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{k1}), \dots, f(x_{1t(n)}, x_{2t(n)}, \dots, x_{kt(n)})) \in \theta_n \\
\Leftrightarrow &(f(g_1(a_1^n), g_2(a_1^n) \dots, g_k(a_1^n)), \dots, f(g_1(a_{t(n)}^n), g_2(a_{t(n)}^n), \dots, g_k(a_{t(n)}^n))) \in \theta_n \\
\Leftrightarrow &(f[g_1, \dots, g_k](a_1^n), \dots, f[g_1, \dots, g_k](a_{t(n)}^n)) \in \theta_n \\
\Leftrightarrow &\widehat{f[g_1, \dots, g_k]} \in \theta_n
\end{aligned}
$$

Ma, poiché $\mathcal{C}$ è un clone, $f[g_1, \dots, g_k] \in \mathcal{C}_n$, cioè $\widehat{f[g_1, \dots, g_k]} \in \theta_n$. Quindi $f \mid: \theta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \in \mathcal{F}(\{\theta_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

$\boxed{\supseteq}$ Consideriamo $f \in \mathcal{F}(\{\theta_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ con f di arietà k e $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}_{(n)}$, allora $\widehat{g_1}, \dots, \widehat{g_k} \in \theta_n$. Ma, siccome f preserva θ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ottiene che

$$\begin{aligned}
&(f(g_1(a_1^n), g_2(a_1^n) \dots, g_k(a_1^n)), \dots, f(g_1(a_{t(n)}^n), g_2(a_{t(n)}^n), \dots, g_k(a_{t(n)}^n))) \in \theta_n \\
\Rightarrow &(f[g_1, \dots, g_k](a_1^n), \dots, f[g_1, \dots, g_k](a_{t(n)}^n)) \in \theta_n \\
\Rightarrow &f[g_1, \dots, g_k] \in \mathcal{C}_n
\end{aligned}$$

Poiché quanto detto vale per ogni $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}_{(n)}$, possiamo prendere $g_i := p_i^k$ per ogni $i \leq k$. In questo modo si ottiene che $f[p_1^k, p_2^k, \dots, p_k^k] \in \mathcal{C}$, ma $f[p_1^k, p_2^k, \dots, p_k^k] = f$, da cui $f \in \mathcal{C}$.

$\square$

Definizione A.79

Sia $\mathscr{A} = (A, F)$. Definiamo una **traslazione elementare** come l'operazione unaria della forma

$$f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

con $f \in F$ e $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotiamo l'insieme di tutte le traslazioni elementari con $F_{(A)}$.

Esempio A.80. Se $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ è un gruppo e $g \in G$, l'operazione $\cdot g(x) = g \cdot x$ è una traslazione elementare.

Teorema A.81

Sia $\mathscr{A} = (A, F)$ un'algebra e θ una realzione di equivalenza su A. Le seguenti sono equivalenti:

(a) *θ è una congruenza;*

(b) $\texttt{Clo}(\mathscr{A}) \mid: \theta$;

(c) *$Pol(\mathscr{A}) \mid: \theta$;*

(d) *$Pol_1(\mathscr{A}) \mid: \theta$;*

(e) *$F_{(A)} \mid: \theta$.*

Dimostrazione. Per ipotesi θ è una relazione di equivalenza, quindi per essere una congruenza resta da verificare la compatibilità rispetto alle operazioni fondamentali. Ma questo vuol dire esattamente che $F \,|\!: \theta$, cioè il punto (a) è vero se e solo se $F \,|\!: \theta$.

Notiamo che $F \subseteq \mathtt{Clo}(\mathscr{A}) \subseteq Pol(\mathscr{A})$, quindi, applicando la $\mathcal{R}$ si ottiene

$$\mathcal{R}(Pol(\mathscr{A}) \subseteq \mathcal{R}(\mathtt{Clo}(\mathscr{A}) \subseteq \mathcal{R}(F).$$

Ciò dimostra le implicazioni $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$.

In maniera simile: $F_{(A)} \subseteq Pol_1(\mathscr{A}) \subseteq Pol(\mathscr{A})$ e applicando $\mathcal{R}$ si ha

$$\mathcal{R}(Pol(\mathscr{A})) \subseteq \mathcal{R}(Pol_1(\mathscr{A})) \subseteq \mathcal{R}(F_{(A)})$$

quindi $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

Mostriamo che $(a) \Rightarrow (c)$. Per il teorema A.78 $\mathcal{F}(\theta)$ è un clone. Poiché θ è riflessiva $Op_0(A) \subseteq \mathcal{F}(\theta)$, inoltre, siccome θ è una congruenza, $F \,|\!: \theta$ quindi $F \subseteq \mathcal{F}(\theta)$. Ma allora $Pol(\mathscr{A}) = \mathtt{Clo}(F \cup A^0) \subseteq \mathcal{F}(\theta)$, che prova la (c).

Infine assumiamo (e), cioè che $F_{(A)} \,|\!: \theta$, e mostriamo (a), cioè che $F \,|\!: \theta$. Sia $f \in F$ e $a_i \equiv_\theta b_i$ per $i \leq n$. Vogliamo dimostrare che $f(\bar{a}) \equiv_\theta f(\bar{b})$. Definiamo per $i \leq n$

$$g_i(x) = f(b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, x, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n) \in F_{(A)}.$$

Ogni g_i è una traslazione elementare, dunque $g_i(a_i) \equiv_\theta g_i(b_i)$. Allora si ha

$$f(\bar{a}) = g_1(a_1) \equiv_\theta g_1(b_1) = g_2(a_2) \equiv_\theta g_2(b_2) = \cdots = g_n(a_n) \equiv_\theta g_n(b_n) = f(\bar{b})$$

quindi, per la transitività di θ, $f(\bar{a}) \equiv_\theta f(\bar{b})$. $\square$

Indice analitico

BIBLIOGRAFIA

[1] Clifford Bergman. *Universal Algebra. Fondamentals and selected Topics*. Taylor & Francis Group, 2012.

[2] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1*. Cambridge University Press, 1994.

[3] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2*. Cambridge University Press, 1994.

[4] T. Evans. Residual finiteness and finite embeddability. A remark on a paper by Banaschewski and Nelson. *Algebra Universalis*, 2:397.

[5] T. Evans. Some connections between residual finiteness, finite embeddability and the word problem. *Journal of London Mathematics Society (2)*, 1:399–403.

[6] Isabel Maria Andre Ferreirim. *On varieties and quasivarieties of hoops and their reducts*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI. Thesis (Ph.D.)–University of Illinois at Chicago.

[7] Martin Hyland and John Power. The category theoretic understanding of universal algebra: Lawvere theories and monads. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 172, 2007.

[8] E. Nelson. On residual finiteness and finite embeddability. *Algebra Universalis*, 2:361–364.

[9] H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Number 78 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

[10] C. J. van Alten. The finite embeddability property for residuated lattices, pocrims and BCK-algebras. *Algebra Universalis*, 48(3):253–271.