Costruzioni universali nella varietà μŁΠ

Luca Spada
lspada@unisa.it
http://homelinux.capitano.unisi.it/∼lspada/

Department of Mathematics and Computer Science.
Università degli Studi di Salerno

XVIII Congresso UMI. Bari 24-29 settembre 2007

Argomenti

Logiche basate su t-norme

Definizione

Una t-norma $*$ è una funzione da $[0,1]^2$ in $[0,1]$ che è:

- associativa: $x(y * z) = (x * y) * z$,
- commutativa: $x * y = y * x$,
- non decrescente: $x \leq y$ implica $x * z \leq y * z$,
- $x * 1 = x$ e $x * 0 = 0$,

Definizione

Un residuo $\rightarrow$, di una t-norma $*$, è una funzione da $[0,1]^2$ a $[0,1]$ tale che

$$x * y \leq z \text{ se, e soltanto se, } x \leq y \rightarrow z$$

Logiche basate su t-norme

Definizione

La logica di Gödel è la logica proposizionale completa rispetto ad i seguenti connettivi:

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad x \to_G y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La logica prodotto è la logica proposizionale completa rispetto ad i seguenti connettivi:

$$x \cdot y = xy \qquad x \to_\Pi y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La logica di Łukasiewicz è la logica proposizionale completa rispetto ad i seguenti connettivi:

Teorema di Mostert e Shields

Le tre logiche appena definite sono le più importanti logiche basate su t-norme continue, per via del seguente risultato:

Teorema (Mostert, Shields '57)

Ogni t-norma continua è localmente isomorfa alla t-norma prodotto, di Łukasiewicz o di Gödel .

Tale decomposizione vale anche per la semantica algebrica delle logiche basate su t-norme continue.

Semantiche algebriche

Teorema (Chang '58)

La semantica algebrica della logica di Łukasiewicz è data dalle MV-algebre.

Teorema (Hájek '98)

La semantica algebrica della logica prodotto è data dalle Π-algebre.

La logica ŁΠ

Definizione

La logica ŁΠ è la logica proposizionale che ha come insieme di connettivi $\{\oplus, \neg, \cdot, \to_\Pi, 0, 1\}$ e soddisfa i seguenti assiomi:

- tutti gli assiomi della logica di Łukasiewicz per $\{\oplus, \neg, 0, 1\}$,
- tutti gli assiomi della logica prodotto per $\{\cdot, \to_\Pi, 0, 1\}$,
- $\varphi \cdot (\psi \ominus \xi) \leftrightarrow (\varphi \cdot \psi) \ominus (\varphi \cdot \xi)$,
- $\Delta(\varphi \to \psi) \to \varphi \to_\Pi \psi$.

Dove $\Delta(\varphi)$ è definito come $(\neg\varphi) \to_\Pi 0$.
Le regole sono modus ponens and necessitazione:

- se φ e $\varphi \to \psi$ allora ψ,
- se φ allora $\Delta(\varphi)$.

Importanza della logica ŁΠ

La logica ŁΠ ha un potere espressivo più forte delle altre logiche su citate:

Teorema (Esteva, Godo, Montagna '01)

La logica ŁΠ interpreta fedelmente le logiche prodotto, di Łukasiewicz e di Gödel . Inoltre, limitandosi alle deduzioni finite, anche la logica di Pavelka è interpretabile nella logica ŁΠ.

Più in generale:

Teorema (Marchioni, Montagna '06)

Ogni logica basata su una t-norma continua con un numero finito di idempotenti è definibile nella logica ŁΠ.

ŁΠ-algebre

Definizione

Le ŁΠ-algebre formano una semantica algebrica per la logica ŁΠ, sono, quindi, strutture del tipo $\mathcal{A} = \langle A, \oplus, \neg, \cdot, \rightarrow_{\Pi}, 0, 1 \rangle$.

Esempio

L'algebra $\langle [0,1], \oplus, \neg, \cdot, \rightarrow_{\Pi}, 0, 1 \rangle$, dove le operazioni sono definite come segue:

- $x \oplus y = \min\{x + y, 1\}$ $\qquad \neg x = 1 - x$
- $x \cdot y = xy$ (prodotto ordinario tra numeri reali)
- $x \rightarrow_{\Pi} y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$

è una ŁΠ-algebra. Inoltre essa genera la varietà delle ŁΠ-algebre.

La logica μŁΠ

Siamo pronti ad introdurre il principale oggetto di studio: la logica ŁΠ con punti fissi punti fissi.

Definizione

La logica μŁΠ si ottiene come un'espansione della logica ŁΠcon un nuovo connettivo (generalizzato)

$$\mu_{\varphi(p)}(\bar{\psi})$$

per ogni ŁΠ-formula $\varphi(p, \bar{\psi})$ nella quale non compare il simbolo $\rightarrow_\Pi$.

Tali connettivi devono soddisfare un numero di assiomi che qui vengono forniti direttamente in forma algebrica.

$\mu Ł\Pi$-algebre

Definizione

Chiamiamo *CTerm* l'insieme degli ŁΠ-termini in cui il simbolo $\rightarrow_\Pi$ non compare. Le $\mu Ł\Pi$-algebre sono strutture del tipo:

$$\mathcal{A} = \langle A, \oplus, \neg, \cdot, \rightarrow_\Pi, 0, 1, \{\mu x_{t(x,\bar{y})}\}_{t(x,\bar{y}) \in CTerm} \rangle$$

che soddisfano i seguenti assiomi:

$\langle A, \oplus, \neg, \cdot, \rightarrow_\Pi, 0, 1 \rangle$ è una ŁΠ-algebra

$\mu x_{t(x)}(\bar{y}) = t(\mu x_{t(x)}(\bar{y}), (\bar{y})),$

se $t(s(\bar{y}), \bar{y}) = s(\bar{y})$ allora $\mu x_{t(x)}(\bar{y}) \leq s(\bar{y}),$

$$\bigwedge_{i \leq n} \Delta(p_i \leftrightarrow q_i) \leq (\mu x_{t(x,\bar{y})}(p_1, \ldots, p_n) \leftrightarrow \mu x_{t(x,\bar{y})}(q_1, \ldots, q_n))$$

La μŁΠ-algebra su [0,1]

Esempio

L'algebra $\langle [0,1], \oplus, \neg, \cdot, \to_{\Pi}, 0, 1, \{\mu x_{t(x)}(\bar{y})\}_{t(x,\bar{y}) \in CTerm} \rangle$ è una μŁΠ-algebra.

Teorema

La μŁΠ-algebra su $[0,1]$ definita sopra genera la varietà delle μŁΠ-algebre.

Notazione

Notazione

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}^{alg}$ sono, rispettivamente, l'insieme degli interi, razionali e reali algebrici.
- $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ è il dominio dei polinomi in n variabili e coefficienti interi.
- $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ è il suo campo delle frazioni.
- Useremo lo stesso simbolo per denotare i loro membri e le funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ ad essi associate.
- Scriveremo $\{P > 0\}$ per $\{v \in [0,1]^n \mid P(v) > 0\}$.

Una considerazione

Nota

Si noti che c'è uno stretto legame tra punti fissi e radici di un polinomio. Difatti, dato un polinomio $P(x)$ il suo insieme di soluzioni è l'insieme dei punti fissi del polinomio $P(x) + x$. Viceversa,il suo insieme di punti fissi può essere visto come l'insieme delle soluzioni del polinomio $P(x) - x$. Questa corrispondenza si preserva anche restringendo i polinomi all'intervallo $[0, 1]$.

Funzioni super-algebriche

Definizione

Fissato $n \in \mathbb{N}$, chiameremo funzione radice ogni funzione $f(y_1, \ldots, y_n)$ tale che per ogni $P(x) = \sum_{i \leq n} a_i x^{j_i} \in \mathbb{R}^{alg}[x]$:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = r \text{ iff } r \text{ è il minimo valore per cui } P(r) = 0.$$

Chiameremo super-algebrica ogni funzione che è:

- una funzione polinomiale razionale $P/Q \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$, o
- una funzione radice, or
- composizione di due funzioni dei tipi precedenti.

Funzioni super-algebriche

Si noti che le funzioni radici non sono abbastanza per la nostra descrizione poiché un elemento di $t \in CTerm$ può essere rappresentato come un elemento di $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Quindi c'è bisogno di una funzione radice per ogni funzione che rappresenta un elemento di $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Definizione

Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutte le funzioni f_R tale che, dato $f \in \mathbb{Z}[x, x_1, \ldots, x_n]$

$$f_R[a_1, \ldots, a_n] = r$$

iff

$$r \text{ è il minimo valore per cui } f(r, a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Funzioni super-algebriche

Lemma

$\mathcal{R}$ è l'insieme delle funzioni super-algebriche.

Dimostrazione.

Si noti che una funzione polinomiale razionale $P/Q \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ è la funzione in $\mathcal{R}$ associata al polinomio $P(x_1, \ldots, x_n) - xQ(x_1, \ldots, x_n)$.
Per l'altra direzione si noti che componendo una funzione radice con una proiezione adeguata si ottiene la funzione desiderata in $\mathcal{R}$. $\square$

Teorema di Galois

Teorema (Galois 1832)

Un polinomio è risolubile per radicali se, e soltanto se, il gruppo degli automorfismi sul campo delle soluzioni che lasciano fisso il campo dei coefficienti e risolubile.

In particolare, esistono polinomi non risolubili per radicali. Quindi le funzioni super-algebriche non sono soltanto funzioni algebriche. Che tipo di operazioni va aggiunto alle funzioni algebriche per ottenere le funzioni super-algebriche è un problema irrisolto.

Algebre libere

Notazione

La $\mu Ł\Pi$-algebra libera su κ generatori sarà indicata con $\mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$.

$\mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$ è una sott'algebra dell'algebra di tutte le funzioni da $[0,1]^\kappa$ a $[0,1]$, generata, partendo dalle funzioni proiezione, dalle operazioni in $\mu Ł\Pi$ definite puntualmente.

Nel caso delle MV-algebre,la caratterizzazione deriva da un risultato classico:

Teorema (McNaughton '51)

The funzioni generate dalle proiezioni con le operazioni di una MV-algebra sono esattamente le funzioni lineari a pezzi con coefficienti interi.

$\mathcal{F}_0(\mu Ł\Pi)$

Iniziamo da $\mathcal{F}_0(\mu Ł\Pi)$. Tale algebra è isomorfa alla $Ł\Pi$-algebra intervallo di $\mathbb{R}^{alg}$. Indeed something stronger holds:

Proposizione

La $\mu Ł\Pi$-algebra intervallo di $\mathbb{R}^{alg}$ si immerge in ogni $\mu Ł\Pi$-algebra linearmente ordinata.

Insiemi semialgebrici

Definizione

Un sottoinsieme S di $[0,1]^n$ è detto $\mathbb{Q}$-semialgebrico se è la combinazione booleana di insiemi della forma $\{P > 0\}$ per qualche $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.
Un sottoinsieme S di $[0,1]^n$ è un semialgebrico se è la combinazione booleana di insiemi della forma $\{P > 0\}$ per qualche $P \in \mathbb{R}^{alg}[x_1, \ldots, x_n]$.

Hats

Definizione

Un *ŁΠ-cappello* è una funzione $h : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ tale che esiste un insieme $\mathbb{Q}$-semialgebrico set S e una funzione $f = P/Q \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ tali che:

- Q non si annulla su S,
- se $x \in S$ allora $h(x) = f(x)$,
- se $x \notin S$ allora $h(x) = 0$.

Un *μ-cappello* è una funzione $h : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ per cui esiste un insieme semialgebrico S ed una funzione super-algebrica f tali che, se $x \in S$ allora $h(x) = f(x)$ e si $x \notin S$ allora $h(x) = 0$.
Se h è una funzione che soddisfa una di queste condizioni sarà indicata con $\langle S, f \rangle$.

Funzioni base

Definizione

Una ŁΠ-funzione base ed una μ-funzione base su $[0,1]^n$ sono, rispettivamente, una somma finita di ŁΠ-cappelli ed una somma finita di μ-cappelli

$$\langle S_2, f_1\rangle + \langle S_2, f_2\rangle + ... + \langle S_k, f_k\rangle$$

tali che $S_i \cap S_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.
Denoteremo con $Ł\Pi B_n$ e B_n, rispettivamente, gli insiemi di ŁΠ-funzioni base su $[0,1]^n$ e μ-funzioni base su $[0,1]^n$

L'algebra B_n

Teorema (Montagna, Panti '01)

$Ł\Pi B_n$ è la ŁΠ-algebra libera su n generatori.

Lemma

B_n contiene le funzioni proiezione ed è una $\mu Ł\Pi$-algebra rispetto alle operazioni definite puntualmente.

Dimostrazione.

Un facile adattamento della dimostrazione del teorema precedente mostra che B_n è chiusa rispetto alle ŁΠ-operazioni. Dato un termine in $t \in Cterm$ sia

$$g = \langle S_1, P_1 \rangle + \ldots + \langle S_r, P_r \rangle$$

la sua funzione associata. □

L' algebra B_n

proseguimento della dimostrazione.

Asseriamo che

$$\mu x_{t(x,\bar{y})} = \langle T_1, Q_1 \rangle + \dots + \langle T_r, Q_r \rangle$$

dove gli insiemi T_i sono semialgebrici e Q_i sono μ-cappelli. Difatti se associamo ad ogni Q_i un nuovo polinomio $Q_i' = Q_i - x$ e chiamiamo $R_{Q_i'}$ le funzioni radice de polinomio Q_i',è facile vedere che:

$$\begin{aligned} \mu x_{t(x,\bar{y})} =& \langle \{\bar{y} \mid \exists z\,(Q_1(z,\bar{y}) = z \wedge (z,\bar{y}) \in T_1)\}, R_{Q_1'} \rangle + \\ & \vdots \\ & + \langle \{\bar{y} \mid \exists z\,(Q_r(z,\bar{y}) = z \wedge (z,\bar{y}) \in T_r)\}, R_{Q_r'} \rangle \end{aligned}$$

□

L'algebra B_n

proseguimento della dimostrazione.

Ma per ogni $1 \leq i \leq r$ l'insieme

$$\{\bar{y} \mid \exists z\,(Q_i(x, \bar{y}) = x \wedge (x, \bar{y}) \in T_i)\}$$

è una proiezione di un insieme semialgebrico.
Quindi per il teorema di Tarski-Seidenberg è, a sua colta, un insieme semialgebrico. Inoltre essi sono tutti disgiunti, poiché gli insiemi T_i sono disgiunti, e $R_{Q_i}(\bar{y}) \neq 0$ poiché $(x, \bar{y}) \in T_i$.
Da ciò segue che se $f_1, \ldots, f_n$ sono funzioni in B_n allora $\mu x_{t(x)}(f_1, \ldots, f_n)$ è anche in B_n. □

Lemma

Siano $P \in \mathbb{R}^{alg}[x_1, \ldots, x_n]$ e $P^\sharp : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ definita per ogni $\bar{v} \in [0,1]^n$ come $P^\sharp(\bar{v}) = \min\{\max\{P(\bar{v}), 0\}, 1\}$. Allora $P^\sharp \in \mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$.

Corollario

La funzione caratteristica di ogni semialgebrico è in $\mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$

Dimostrazione.

Poiché $\mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$ è chiuso per operatori booleani, è suffciente provare che le funzioni caratteristiche degli insiemi della forma $\{P > 0\}$ sono in $\mathcal{F}_\kappa(\mu Ł\Pi)$. Ma una tale funzione è proprio $\neg\Delta(P^\sharp)$ □

$\mathcal{F}_\kappa(\mu$ŁΠ$)$

Teorema

$\mathcal{F}_n(\mu$ŁΠ$)$ è l'algebra delle funzioni super-algebriche a pezzi da $[0,1]^n$ a $[0,1]$

Dimostrazione.

Bisogna mostrare che ogni funzione base è in $\mathcal{F}_\kappa(\mu$ŁΠ$)$. Poiché gli insiemi semialgebrici che appaiono nella definizione di una funzione base sono tutti disgiunti, possiamo sostituire ogni $+$ con $\oplus$. Quindi è sufficiente mostrare che ogni μ-cappello è in $\mathcal{F}_\kappa(\mu$ŁΠ$)$. Ciò deriva facilmente dalla definizione. $\square$